● 国家出版基金资助项目

华罗庚文集

应用数学卷 II

杨德庄／主编

科学出版社
www.sciencep.com

国家出版基金资助项目

华罗庚文集

应用数学卷 II

杨德庄　主编

(华罗庚应用数学与信息科学研究中心)

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本卷介绍著名数学家华罗庚先生在应用数学领域的成就.

本卷分卷 I、卷 II 两卷，卷 I 主要内容包括近似分析中的数论方法和应用统计中的数论方法，卷 II 主要内容包括计划经济大范围最优化数学理论、关于经济优化平衡的数学理论、数学普及之初简介、统筹方法平话及补充、优选法平话及补充、优选学等. 从卷 I、卷 II 可以看出华罗庚在中国发展应用数学的开拓性工作分两个层面：创造性工作层面与普及推广工作层面，也可以看出他的探索创新之路和他的深遂的导向观点.

本卷适合数学及相关专业大学生、研究生、教师及科研人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

华罗庚文集：应用数学卷 II/杨德庄主编. —北京：科学出版社，2010

ISBN 978-7-03-027250-8

Ⅰ. 华… Ⅱ. 杨… Ⅲ. ①数学-文集 ②应用数学-文集 Ⅳ. 01-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 069904 号

责任编辑：张 扬 / 责任校对：陈玉凤

责任印制：钱玉芬 / 封面设计：黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 5 月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)

2010 年 5 月第一次印刷 印张：21 1/4

印数：1—3 000 字数：407 000

定价：98.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

纪念华罗庚先生诞辰100周年

出 版 说 明

“华罗庚是他那个时代的世界级领袖数学家之一, 对于中国近代数学发展作出了重大贡献”. “他的绝大部分工作时间是在中国度过的. 如果今天有许多中国数学家能在科学前沿作出突出贡献的话, 如果数学在中国能享有异常普遍尊重的话, 那就要在很大程度上归功于作为学者与导师的华罗庚五十年来对于中国数学事业的领导和贡献”. 这是国际数学界对他的赞誉, 并称他为一位奇才, 他有卓越的个人学术成就, 同时他是一位历史上罕见的发展本国数学的数学思想家、实践家.

华罗庚受到的正规教育仅到初中毕业, 之后读了一年多职业学校, 即主要靠自学成为伟大的数学家, 无疑他要比通常的数学家付出更多的辛劳. 他是我国解析数论、自守函数论、多复变函数论、典型域上的调和分析、典型群、除环论、数值分析中的数论方法及应用数学等众多领域的创始人与开拓者, 他的一些著作已经成为这些领域的经典文献.

华罗庚是一位爱国数学家. 在抗日战争刚开始时, 他即从英国回到中国, 在云南昆明执教于西南联合大学直至抗战胜利. 中华人民共和国刚成立, 他即放弃在美国伊利诺依大学的终身教授职务, 率全家于 1950 年回到祖国, 担负起领导中国数学发展的工作达三十余年, 直到去世.

华罗庚非常关心同时注意培养年轻数学家, 并能和同事们共同讨论切磋. 早在昆明时期, 受他影响而成为著名数学家的有段学复、闵嗣鹤、樊几、徐贤修等人. 1950 年以后, 受他影响与在他直接领导之下工作的人就更多了, 如冯康、越民义、万哲先、陆启铿、龚升、许孔时、王元、陈景润、丁石孙、丁夏畦、王光寅、张里千、陈希孺、吴方、魏道政、严士健、潘承洞、任建华、石钟慈、许以超、冯克勤等人. 他还为大学生写了不少教科书.

华罗庚很重视科学普及工作及数学方法在工业生产中的应用. 他是我国数学竞赛活动的创始人并为中学生写了不少课外读物. 华罗康持续了近二十年在中国各省、市、自治区普及推广工业生产中的数学方法, 给工人们讲课, 产生了很好的经济效益和社会效益. 长期跟他一起工作的有陈德泉、计雷、李之杰、徐伟宣、杨德庄等人. 他非常重视发展应用数学的探索创新工作, 与他密切合作的有王元, 受他学术思想、方法论引领与影响下工作的有曾肯成、裴定一、方开泰、杨德庄等人.

当然, 华罗庚也得到了他的前辈对他的教导与培养, 得到了他的同辈数学家对他的关心与帮助. 特别在他年轻处于最困难处境的时候, 得到了熊庆来、杨武之、叶企荪等先生对他的提拔与帮助.

我们应该全面总结华罗庚的一生, 以便后辈们能更好地以他为榜样, 将中国的数学事业搞上去, 更好地服务于祖国. 同时, 研究华罗庚无疑也是中国近代数学史研究的重要任务之一.

科学出版社邀请长期与华罗庚一起工作的几个学生负责编辑《华罗庚文集》, 无疑是一项非常有眼光的举措. 作为他的学生与晚辈, 我们都愿意积极奉献力量. 我们将首先编辑出版他的原始论文与学术专著, 将按数论、代数几何、分析、应用数学来分类编辑.

最后, 我们在此对于支持这项工作的单位与友好人士表示衷心的感谢, 特别要感谢中国科学院数学与系统科学研究院的创新资金的支持, 感谢国家出版基金的支持, 感谢中国科学院知识创新工程资助项目“中国近现代科学技术发展综合研究” (KJCX-W6) 与国家自然科学基金委“20 世纪数学史”研究项目 (2052100) 的支持. 科学出版社的编辑同志对本书的出版做了大量深入细致的工作, 在此一并感谢.

《华罗庚文集》应用数学卷编辑组

序

在纪念数学大师华罗庚 100 周年华诞之际, 纵观中国应用数学发展史, 从探路工作以及始于 1958 年的数学普及工作, 到创造型工作 (以闻名国际的华–王方法为代表), 到应用数学人才的培养工作, 人们清楚地看到了华罗庚和王元对中国应用数学发展的引领和推动作用, 他们是探路人和开拓者; 人们还清楚地看到他们的应用数学工作始终就密不可分. 他们是应用数学紧密合作 (团队式工作) 的典范. 因此, 出版他们的应用数学文集, 科学的、恰当的做法, 就是把华、王的工作成果放在一起出版. 这就是本书在编辑时最初确定的书名为《华罗庚、王元应用数学文集》的缘由. 但是, 王元认为他的应用数学一直都是在华老指导与影响下, 与他共同进行的, 应该属于"华罗庚应用数学体系与工作"中的一部分, 应该以华罗庚冠名出文集是最适当的, 所以本文集最后定名为《华罗庚文集: 应用数学卷》.

紧密合作的典范

1. 探路工作的密不可分

为什么要探路?

数学是什么? 应用数学是什么? 应用数学应该是什么样子? 时至今日, 国际数学界仍在争论之中. 众所周知, 尽管有争论, 但是对于纯粹数学研究而言, 国际上已有几百年来逐步形成的一种套路可循, 而应用数学则没有. 因此, 各国为发展本国的应用数学的领头人, 首先要探路 (通俗地讲, 就是应用数学搞什么? 怎么搞?).

数学研究, 领头的数学家的视点, 具有导向作用, 纯粹数学是如此 (如 Hilbert 1900 年提出的 23 个问题, 就是他汇总了前人的观点, 加他本人的感悟, 形成的一种对数学今后发展的观点, 它影响了 20 世纪的数学发展方向), 应用数学也是如此. 在探索中国应用数学之路时, 需要观点导向, 在中国应用数学起步时, 导向观点集中体现在华罗庚、王元合作的文章《有限与无穷, 离散与连续》中. 因为应用数学主要涉及数学外部的实际问题和纯粹数学与别的学科 (分支) 的交叉应用的问题, 它要构建数学模型或重构数学模型, 它还要研究对模型的数值求解的好算法. 因此, 《有限与无穷, 离散与连续》的辩证统一的观点与技巧, 极为重要. 文中的观点与实例导引人们对离散性、非线性、随机性的特殊视角, 那是近年来应用数学家才充分认识到的"三性"难点, 在 20 世纪五六十年代华罗庚和王元就已点明了. 文中还强调了离散问题特殊性和离散逼近思想的重要性.

探路工作还需要寻找“问题”.

华罗庚和王元认为“问题”对纯粹数学研究和应用数学研究一样重要, 这与许多著名数学家观点一致, 比如 M. Atiyah 就强调“问题”在数学发展中起关键作用. 但是, 应用数学“问题”的寻觅与纯粹数学不同. 纯粹数学“问题”主要来自数学内部, 大量的猜想和各纯粹数学分支文献中的问题展现在读者的面前, 应用数学的问题多来自数学的外部, 寻找这样的“问题”具有相当的难度, 多数“问题”还只是自然语言的表述, 未形成数学问题; 即使与纯粹数学有关的应用数学“问题”, 没有洞察力和数学的慧敏, 也难以捕捉到. 华罗庚和王元从事应用数学工作起步时, 首先要寻觅应用数学“问题”. 他们毕竟首先是纯粹数学家, 在中国对应用数学需求先天不足的那个时代, 他们只好先从书本上、文献上找“问题”. 他们成功了, 他们找到了“问题”. 他们在寻找“问题”的工作上, 就密不可分, 那是一个个过程, 是一个个有趣的故事. 这里叙述两个故事. 华罗庚想到采矿与水利等方面可能有数学问题, 于是他让王元到北京各有关部门去了解情况. 王元在北京矿业学院的教师那里借来了几本“矿体几何学”的书. 华罗庚从他的朋友陆漱芬那里学到了地理学家计算坡地表面积的方法. 这样结合起来, 他们共同找到了应用数学的第一个“问题”, 研究完成了第一篇应用数学论文. 第二个故事是“华–王方法”的“问题”, 关于数论在多重积分近似计算中的应用问题. 苏联是世界数学强国, 1957 年苏联科学院的工作总结中提到了两项重要数学成果, 两项之一为数论在多重积分近似计算中的应用. 有一篇俄文的文章中讲到积分近似计算中的蒙特卡罗方法, 讲到其中所需的随机数服从一致分布等. 王元拿了文章去找华罗庚谈. 那天华罗庚很累, 不想看. 王元说:“就看这一行, 行不行?”华罗庚看后很兴奋地说:“蒙特卡罗方法实质上就是数论中的一致分布论的应用, 这就好像隔着一层纸, 戳穿了就那么一点点东西.”此时他们俩心有灵犀一点通, 已经共同洞察到这个问题更深层的数学现象. 他们立即捕捉住他们共同寻觅的“问题”. 这是他们共同寻觅的第二个“问题”.

2. 创造型攻关研究的紧密合作.

纯粹数学研究成果主要靠纯粹数学家个体完成的. 比如, 华罗庚、王元、陈景润在数论领域的辉煌成就, 都是靠他们个人的聪慧才智登上了别人达不到的高峰. 当然也有特例, 比如, “对于整整一代人来说, 哈代、利特伍德的合作主宰了英国的纯粹数学, 也在很大程度上主宰了世界的解析数论. 但是至今没有人知道他们是如何合作的”. 应用数学攻关研究要靠团队的合作力量, 华罗庚、王元从事应用数学研究一开始, 就给后来人树立了榜样. 他们对共同寻找到的应用数学问题进行攻关研究时, 紧密合作. 对于第一个“问题”, 华罗庚首先证明了一个漂亮的不等式

$$V \leqslant B \leqslant S$$

(V、B、S 分别表示地理学家伏尔柯夫方法、矿业学家包曼方法求坡面面积的极限结果, S 是坡面的真面积).

王元用华罗庚的方法对"矿体几何学"书上介绍的估计矿床体积的方法进行理论探讨, 得到了一系列好结果. 他们一起只用一点微积分, 只用了 12 页, 就把 300 多页的"矿体几何学"上的计算方法全写出来了. "关于在等高线图上计算矿藏储量与坡地面积的问题", 就是他们共同攻关的第一个"问题"的成果.

对于第二个"问题", 华罗庚、王元密切合作进行攻关研究就更精彩了. 就在 1958 年, 华罗庚与王元在苏联的《科学通报》上见到数论方法用于高维数值积分的第一篇理论文章, 他们有特殊的敏感性和洞察力, 看到了更深层的问题, 他们立即开展深入研究. 他们从 2 维入手, 华罗庚猜出用斐波那契数列来构造 2 维一致分布点列的方法可以得到最佳求积公式, 王元只用两页纸就证明了一个重要的公式, 虽然同时代其他数学家也得到同样的结果, 但所用的方法要间接而麻烦得多.

接着, 他们要转向高维空间, 华罗庚凭他特有的数学直觉, 从斐波那契数列中相邻两数之比是黄金数 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的渐近分数出发, 又提出理想的思路. 但高维问题逻辑推理遇到了困难. 他们仍然紧密合作进行攻关研究, 有半年多时间, 王元一清早就去华罗庚家, 在他家一起进早餐, 饭后就演算, 但仍无进展, 攻关陷入困境. 后来新的转机出现了, 是历史的巧合, 也是播种与收获. 他们的攻关研究在中国第一台电子管电子计算机上算出结果. 华罗庚正是中国电子计算机研制的倡导者和组织者, 由于他的工作, 中国才有了第一台电子管计算机. 攻关成功还在于王元的另一个创造性思维, 他借助文献的启发, 放弃了逻辑推导来证明定理的手段, 改用计算机模拟的手段, 即根据华罗庚关于分圆域的想法, 编了一个计算程序, 先在台式计算器上算出点列, 然后请计算所的人在电子计算机上算出这个点列对应的求积公式的最大误差, 最终在电子计算机上算出了结果. 这是华罗庚、王元的密切合作的成果, 它是一个"构造性的方法". 计算量是 $\log n$ 数量级, 而一般的计算量是 n^2 数量级. 他们把结果发表在《中国科学》的《研究简报》栏上. "文革"爆发后, 他们的工作中断了. 至 1972 年, 华罗庚参加了由廖承志率领的一个代表团访问了日本. 日本数学家告诉他, "华–王方法"很成功, 并在有关文献中看到了首次以"华–王方法"来命名他们的成果. "文革"结束前夕, 他们将研究结果写成几篇论文发表在《中国科学》上, 并着手撰写专著《数论在近似分析中的应用》, 全面总结了这一领域的成就, 该书于 1978 年由科学出版社出版. 1981 年, 施普林格出版社与科学出版社联合出版了这本书的英文版.

我们将两位数学家华罗庚、王元关于"华–王方法"陆续发表的论文, 以及施普林格出版社与科学出版社联合出版英文版《数论在近似分析中的应用》一并编辑出版. 做出范式以便后来者评读.

用计算机模拟代替逻辑推导来证明定理的手段, 不但产生了"华–王方法", 而

且在中国可能是最早成功的范例. 计算机模拟技术, 后来发展为计算机仿真技术, 其核心是数学技术, 俄罗斯数学家 A. A. Samarskii 称其为“数值实验”方法, 并称其为一种新的科学方法.

“华–王方法”的产生, 还给人们一个启示: 灵活性的重要性, 假若华罗庚、王元坚持用逻辑推导来证明定理的手段不放弃, 可能要很长时间才出成果, 而且还失去了创造性的构造性方法的产生. 灵活地转换手法和途径, 是应用数学家最重要的素质之一.

华罗庚与王元的密切合作, 完全不同于哈代与利特伍德的合作. 他们的数学思想、方法技巧的结合, 我们可以从王元的相关回忆文章中得到更深刻的感悟.

这项工作能够顺利完成是华罗庚与王元密切合作的结果, 王元非常感谢华罗庚对他的指导, 并屡次提出宝贵的原始数学思想; 华罗庚也对王元提出来要研究这一课题而感到满意, 他在一张字条上谦虚地写道“被王元拉上一条路”, 又写道“我对蒙特卡罗方法的一知半解, 就是在年轻人帮助之下学来的”, 真是“多年师生成兄弟, 共同学习共钻研”.

“一些对华罗庚了解不深的人往往以为他的最大优点是逻辑推导与计算能力强, 其实他最强的数学才能恰好是他的数学直觉. 华罗庚的另一个特点是先从一个具体而简单的特例着手研究的单刀直入式的研究方式.”

两个层面的工作, 两种不同的成果

华罗庚、王元在中国发展应用数学, 一直是在两个层面上开展工作: 一个层面是普及型, 另一个层面是创造型. 普及型工作分成两类: 一类是面向中学生的, 另一类是面向大众的. 面向大众的普及型工作和创造型工作都始于 1958 年. 那一年, 全国首次推广运筹学中的线性规划方法 —— 中国独特的“图上作业法”, 曾形成群众运动, 并在山东济南召开过现场会; 那一年, 在应用数学人才培养方面, 在新创建的中国科学技术大学, 设立“应用数学与计算技术系”(这是在高校首次开办应用数学系), 华罗庚、王元从基础课教学开始, 在中国科大培养应用数学人才; 还在那一年, 华罗庚、王元探索创造型层面的研究也开始了. 就在那一年, 他们找到了后来世称“华–王方法”的“问题”, 从找到“问题”并立即投入研究, 持续到 1978 年科学出版社出版专著, 再到 1981 年施普林格和科学出版社联合出版专著的英文版, 一系列高水平成果遍布在这 20 多年期间 (尽管“文革”中中断了几年); 另一项创造型的研究 —— 数学在国民经济中的应用, 同一时间也开始了, 有关思想和成果在“有限与无穷, 离散与连续”中已有展示, 这项工作被盗毁于“文革”期间, 华罗庚在 1981 年开始又重新回忆并加上新的创造形成新的成果, 王元又对这个成果进行整理改写, 到此为止, 也时续了 20 多年.

华罗庚的前期数学普及工作, 从 1958 年开始到 1960 年, 除了普及“线性规划”外, 还有农村“麦场设置”, 以他名义曾在《光明日报》和《数学学报》上发表过有关文章, 王元与万哲先执笔写了《物资调运工作中的数学方法》一书, 王元与朱永津等又执笔撰写了一本教科书《线性规划的理论及其应用》. 这些都未收录到本文集中. 华罗庚的后期数学普及工作始于 1965 年, 以普及推广统筹法、优选法为主要内容. 统筹法、优选法也是从书本、文献中选出来的, 但与创造型不同, 创造型挑选的是“问题”, 普及型挑选的是“方法”, 是“技术”, 是可以加工成通俗易懂的方法或技术. 华罗庚在“学术上洞察之深、选材之妙、加工之巧、表达之深入浅出”, 他写的普及读本, 真正让大众看得懂、学得会、用得上、见成效. 在编辑这本文集时, 普及型的文集首选的是两个评话, 它是普及著作的精品, 是范本.

华罗庚面向中学生的教学普及著作精品已有专辑出版. 一般说来, 它不属于应用数学文集范围, 本文集不再重复刊登. 但有一文例外, “谈谈与蜂房结构有关的数学问题”, 它既是给中学生讲的数学普及读物, 又是从刊物上找到的应用数学“问题”的研究成果. 蜂房的优化结构、生物现象、自然界奇迹, 其中最迷人的是数学现象. 小小的蜜蜂怎么解决蜂房优化结构的数学问题. 华罗庚的“始之以有趣”、“好奇”, 使他放不下在通俗读物上看到的奇观, 他抓住了这个“问题”, 展开研究. 怎么展开, 怎么深入, 怎么……, 只要看他写的十六个小标题, 任何人都会被吸引住 (0 楔子、一有趣、二困惑、三访实、四解题、五浅化、六慎微、七切方、八疑古、九正题、十设问、十一代数、十二几何、十三推广、十四极限、十五抽象). 这又是一篇创造型的范文.

应用统计中的数论方法, “问题”来自实际 —— 导弹设计中提出的试验设计问题. 王元、方开泰提出的“均匀设计”是具有独创性的成果. “追本溯源, 若无华罗庚对近似分析中数论方法的倡导与工作, 很难设想这项工作能在中国这样快地发展起来, 所以也应该部分地归功于华罗庚”. 本文集选用了这领域的几篇最重要的, 与数学关系较多原创性文章.

华罗庚曾写过《数学方法与国民经济》一书的征求意见初稿, 该书分三部分, 用“前言”、“中论”、“后语”分开. 该书初稿中提到“在本世纪 (指 20 世纪) 中叶……想把国民经济提上去的愿望, 明知学识和经验不足, 宁可放着驾轻就熟的理论专长于第二位, 硬着头皮进行尝试, 初步归纳出 12 个字: 大统筹, 广优选, 联运输, 策发展. 再经过发展, 又提出 36 字: 大统筹, 广优选, 联运输, 精统计, 抓质量, 理数据, 建系统, 策发展, 利工具, 巧计算, 重实践, 明真理.

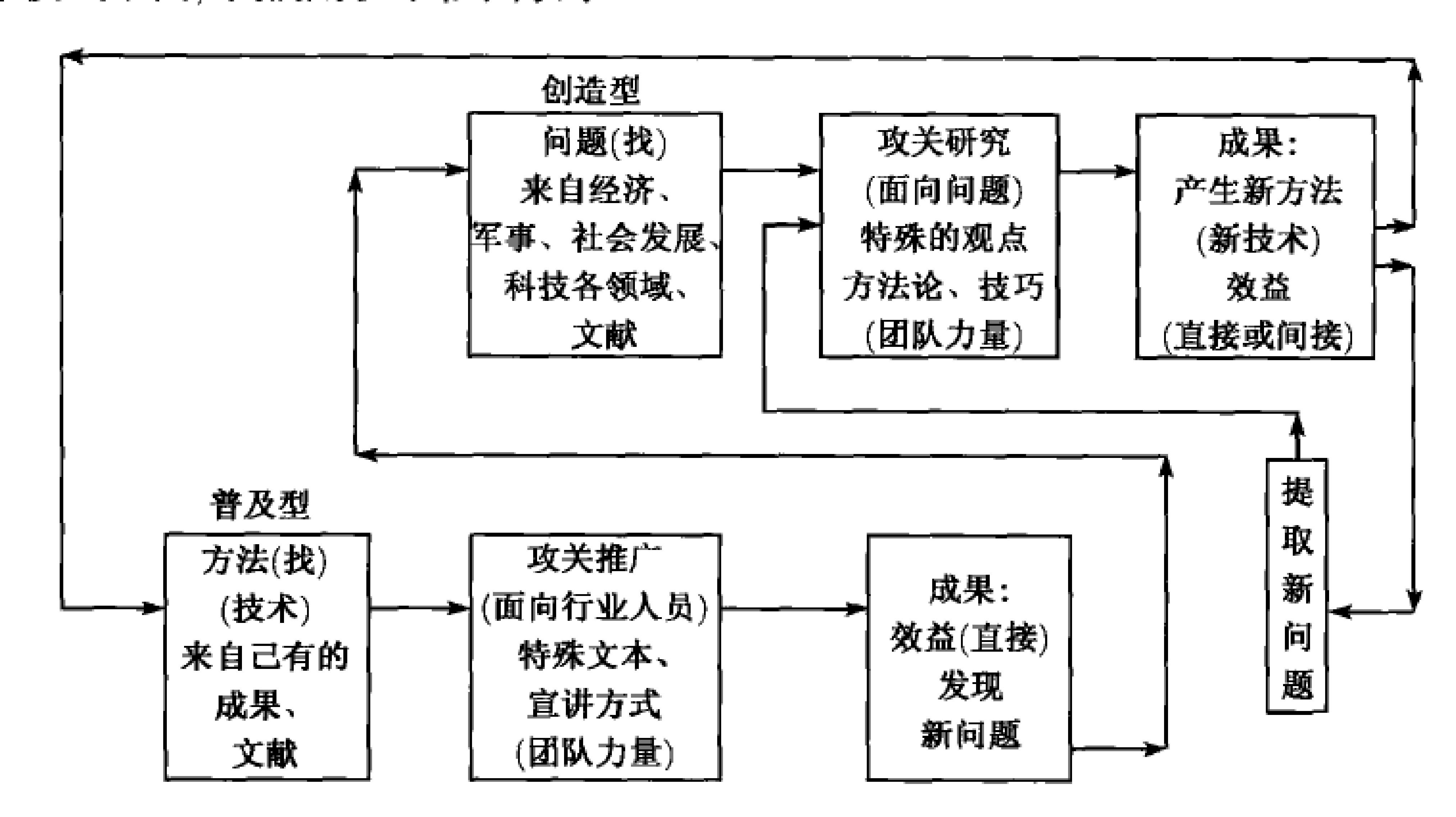
从 12 字发展到 36 字. 以建系统, 策发展的“正特征矢量法”的优化经济数学理论与技术为终结. 该书未经作者审定出版, 本文集也未把这部分内容收集在内.

华罗庚在评论一个人的工作时, 曾说过“一个人的工作有几项, 比如讲有两三项, 在历史上留下来就很了不起. 一个人一辈子发表了几百篇论文, 许多著作, 真正

能在历史上记一笔的就那么几项, 其他就随风飘了”. 他在谈自己工作时, 在应用数学方面, 就提到了两项: 其一就是数论在近似分析中的应用 (华–王方法); 其二是经济系统优化方法, 并且他把它和普及统筹法、优选法放在一起. 他说从 60 年代初开始, 为中国经济建设服务的应用数学工作, 主要是建了一个“门”, “门”字的两竖杠是两根柱子: 一边是“统筹法”, 另一边是“优选法”; “门”的横梁是“正特征矢量法”. 他明确指出, 统筹法和优选法可以作为他经济系统优化理论与方法 (技术) 的基础性方法 (技术).

本文集仅收集华罗庚、王元的应用数学方面已发表的论文, 不包含他们纯粹数学方面的论文. 即使应用数学方面, 也不是他们的全部工作的反映, 这与纯粹数学不同, 因为应用数学的许多工作是不能以论文形式发表的. 再者, 我们也不做他们的成果评价, 只不过应用数学特殊性 (人们对它的认识等方面), 我们不得不多花了一些笔墨去描述, 比如探路工作、工作特点、普及型、创造型等等; 但是, 从文集的文章还不能全面反映他们应用数学观点和方法论特色, 比如数学现象、数学技术、数学工程、模型论、算法论、团队论、交叉综合论等观点. 请见附录 2、3.

两个层面的工作和两种不同的成果, 还要补充几句话. 首先两者工作过程和工作模式不同, 我们用以下框图表示:



框图表示意在给人以明快、直观的逻辑思维模式和整体的工作流程. 从框图可见:

创造型研究, 始于“问题”, 经过奋力攻关, 形成的成果是产生新的数学技术 (新的数学方法), 同时产生直接或间接的效益.

例如,

① 始于“数论在近似分析中的应用”的问题, 奋力攻关后, 产生了“华–王方

法”(新的数学技术). 应用于各个领域, 产生了效益, 也具有很高的学术水平.

② 始于中国经济背景的“经济优化发展”问题, 奋力攻关后, 产生了“正特征矢量法”(新的数学技术). 它与列昂铁夫的“投入产生法”不同:“投入产生法”意在经济系统的平衡; “正特征矢量法”旨在经济系统的优化发展, 给出优化发展的策略. “正特征矢量法”, 虽未有实践, 那是因为各种条件限制以及认知不足, 终究可能会被采用的, 华罗庚的学生们一直在为此而努力. 即使在西方经济, 社会发展条件下, 列昂铁夫的“投入产出法”(1936 年提出) 也经过了 11 年 (1947 年) 才在实际中列出第一张投入产出表.

普及推广型, 始于数学技术 (数学方法), 经过成功的加工运作, 努力普及推广, 产生直接 (或间接) 的经济社会效益.

华罗庚的普及数学技术工作与众不同, 极具创造性. 在广度、深度上都是史无前例的, 形成了规模空前宏大的群众运动. 他在普及文本加工时, 采用通俗易懂的平话形式, 并用高超的、深入浅出的、形象化的讲授方式向大众介绍数学技术. 他的普及数学工作是开创性的, 在国际上引起了极大反响, “从来没有一位数学家有他这么多的听众”、“百万人的数学”, 产生“万项成果”的效益, “对所有数学家是一种挑战”.

本文集的编撰得到王元老师的指导和帮助, 还得到华老亲属的关怀和帮助, 以及中国科学院自然科学史研究所张利华研究员的全力支持和帮助, 她不仅帮助收集文献, 还帮助编辑文集和修改有关说明性文章, “华罗庚应用数学与信息科学研究中心”的全体研究人员也给予大力支持和帮助, 特别是“华中心”的华光常务副主任, 始终把编撰本文集作为发展他父亲的应用数学事业的大事与编者一起工作, 在此一并表示衷心的感谢.

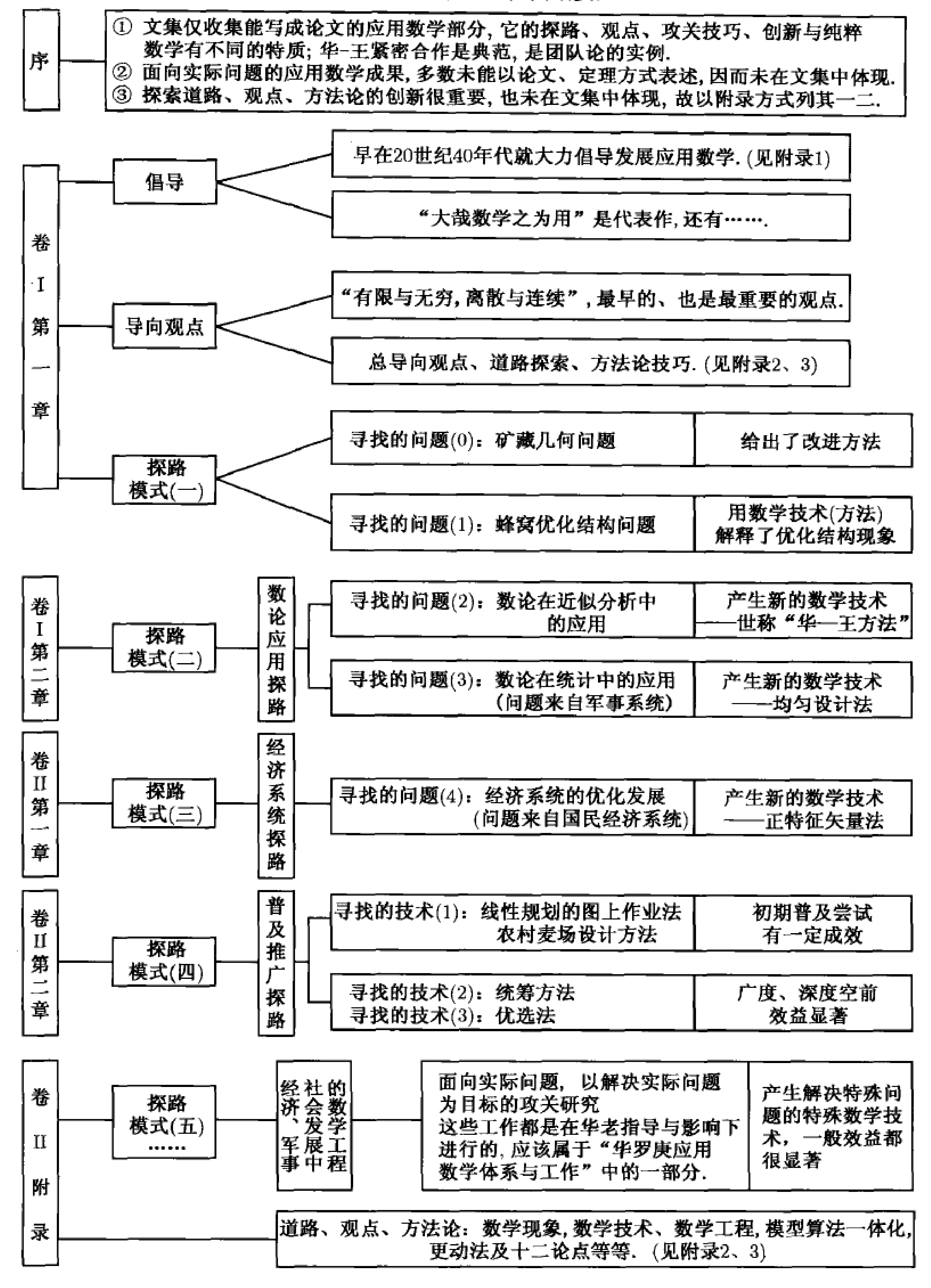
华罗庚应用数学与信息科学研究中心主任

杨德庄

2009 年 8 月

华罗庚文集应用数学卷

（内容结构之框图纲要）



目　录

第一章

创造型工作(II)、探路(III)之代表作

计划经济大范围最优化的数学理论

(I) 量综与消耗系数方阵

华罗庚

(中国科学院, 北京)

引　　言

在《回忆马克思、恩格斯》第一册中, 拉法格 [1] 写下了以下的回忆:"他 (马克思) 还认为一种科学只有在成功地运用数学时, 才算达到完善的地步."

苏联涅姆钦诺夫院士 [2] 指出:"在这方面, 经济科学不能有任何例外."这句话无疑是正确的. 他还将经济学与天文学进行比较来论述他的看法. 他说:"天文学是最精密的科学, 尽管在开始宇宙航行之前它还没有一点可能性来检验自己假设的正确性和直接在星际空间进行试验. 天文学之所以成为精密科学, 是由于数学方法在加工天体运行的观察时的应用. 经济学成为精密科学的可能性更大些, 因为它的对象处于日常的业务观察和统计观察之下 [2]."

对这一比较, 虽然会有不同的看法. 例如, 时至今日, 天文学竟比经济学更早地成为精密的科学了. 事实上, 早在星际航行之前, 天文学家早就先算出了海王星的存在及其轨道和位置, 然后才发现海王星 —— 因此人们羡称之为铅笔尖上的行星. 而星际航行的试验, 只不过是发现海王星, 冥王星之后的又一个验证而已.

虽然如此, 我们且撇开不谈究竟那个"可能性"更大些的无谓争论, 而用事实来阐明马克思的论断. 我们尝试着把数学方法更有效地用到经济领域中去. 从五十年代以来, 在实际中, 从理论上看到了数学方法真正用在经济领域中的可能性, 写了不少手稿, 在"十年浩劫"中荡然无存.

但在党的十二大的号召下, 深知这方面研究的重要性. 因此, 竭尽精力地回忆, 忘年奋勇地创造, 写出了一系列文章. 现在先发表一些摘要, 作为阐明马克思论点的一个开端, 抛砖引玉, 如此而已. 至于马克思著作的其他指导作用, 将在文中逐步指出.

产量综 (或产综或量综)

社会中的经济结构是复杂的. 有各种各样的产品, 各种各样的劳务, 其间有错

综复杂的关系. 怎样处理之? 人类文明开始之后, 就发明了货币制度, 一直延续到今天. 把以吨计的钢铁, 以瓩计的电力, 以立方米计的天然气, 用吨公里计的运输量, 以台数计的机器设备 (例如多少标准台的拖拉机), 甚至各种劳务、教育、科学研究、文化费用, 分别用货币的数量来表示各种产品在同一的货币单位 (如人民币) 来进行按价交换.

也正因为有了币制, 生产, 消费等一切社会经济活动便都可以用同一个单位来计算. 甚至于整个社会的总财富, 每年的生产总值都可以用统一的单位 —— 货币来表达, 来衡量社会生产的消长和变化.

在历史上, 货币起过很大的作用, 并且在相当长的时间内还将起大作用. 但货币毕竟是货币, 而不是实物与劳务. 不能正确反映不同物品的价格定得是否得当, 是否合理, 还有各种劳务所产生的经济效果怎样计算, 等等. 加之通货的膨胀和收缩, 还有为了各种原因不得不有人为的补贴、税率等等. 同一种物品可能有几种不同的价格, 如不变价格、调配价格、自由市场价格、国际市场价格, 资本主义社会还有竞争价格或垄断价格等等. 所以一方面要承认货币的重要性, 另一方面也要看到货币制度所产生的缺点和不可依赖的一面.

数学方法在于从若干简单的基本概念或几个基本假设入手, 运用逻辑推理得出结论, 然后在实际中验证它的正确性. 如果结论不正确, 又可以反过来检查出基本假设或概念的不足处, 把原定的假定和概念进行局部修改, 甚至全部推倒重来.

现在我们引进一个简单的概念产综 (或产量综).

人们通常遇到的是一种产品的变化, 而实际上, 在社会上, 各种产品是互相关联, 互相制约地发生变化的, 因此引起如下的概念.

把组成社会生产的多种重要产品或劳务按号码排列起来如 $1, 2, \cdots, i, \cdots, n$. 其中第 i 种产品的单位以 p_i 表示之. 例如第 i 种产品是钢, 则 p_i 就是吨; 若第 i 种产品是电, p_i 就是瓩; 如果第 i 种产品是布, 则 p_i 就是尺; 码或米.

如果第 i 种产品的数量是 x_i 个 p_i 单位, 则整体可以用量

$$\underline{\underline{x}} = (x_1, \cdots, x_n)$$

表之. 这个矢量便称为产综 (或产量综). 整个国民经济的变化便是产综的变化 —— 整体的变化.

例如开始生产时的产综是

$$\underline{\underline{x}}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}),$$

第 j 年的产综是 $\underline{\underline{x}}^{(j)}$, 于是整个经济的发展变化是

$$\underline{\underline{x}}^{(0)} \to \underline{\underline{x}}^{(1)} \to \cdots \underline{\underline{x}}^{(j)} \to \cdots .$$

本文 1983 年 10 月 18 日收到.

研究经济的变化发展就是要研究产综的变化情况. 各产品按同一比例增加, 用数学式子表示就是 $\underline{\underline{\boldsymbol{x}}}^{(j)} = \rho_j \underline{\underline{\boldsymbol{x}}}^{(0)}$, 成倍增长则可以表成为 $\rho_j = \sigma^j$, σ 是逐年的增长倍数.

消耗系数方阵 (或称结构方阵)

设初始产综是 $\underline{\underline{\boldsymbol{x}}}^{(0)} = (\underline{\underline{\boldsymbol{x}}}_1^{(0)}, \cdots, \underline{\underline{\boldsymbol{x}}}_n^{(0)})$. 第一年度将 j 类产品分配给 i 类的数量 (用于再生产或其他目的) 设为 $\underline{\underline{\boldsymbol{x}}}_{ij}^{(0)}$, 于是整个分配情况可以通过表 1 来表示

表 1

i \ j	1	2	$\cdots$	j	$\cdots$	n
1	$x_{11}^{(0)}$	$x_{12}^{(0)}$	$\cdots$	$x_{1j}^{(0)}$	$\cdots$	$x_{1n}^{(0)}$
2	$x_{21}^{(0)}$	$x_{22}^{(0)}$	$\cdots$	$x_{2j}^{(0)}$	$\cdots$	$x_{2n}^{(0)}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
i	$x_{i1}^{(0)}$	$x_{i2}^{(0)}$	$\cdots$	$x_{ij}^{(0)}$	$\cdots$	$x_{jn}^{(0)}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
n	$x_{n1}^{(0)}$	$x_{n2}^{(0)}$	$\cdots$	$x_{nj}^{(0)}$	$\cdots$	$x_{nn}^{(0)}$
总产量	$x_1^{(0)}$	$x_2^{(0)}$	$\cdots$	$x_i^{(0)}$	$\cdots$	$x_n^{(0)}$

因此得到

$$x_j^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}^{(0)}, \tag{1}$$

用产综的矢量形式来表示, 就是 $\underline{\underline{\boldsymbol{x}}}^{(0)} = \sum\limits_{i=1}^{n} \underline{\underline{\boldsymbol{x}}}^{(0)}(i)$, 这里 $\underline{\underline{\boldsymbol{x}}}^{(0)}(i)$ 表示分配给第 i 类的产综.

一年 (或其他单位时间) 后所生产出的产综是

$$x^{(1)} = (x_1^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)}). \tag{2}$$

命

$$a_{ij}^{(0)} = x_{ij}^{(0)} / x_i^{(1)} (p_j / p_i). \tag{3}$$

它的意思是: 每生产一个 p_i 单位的 i 类产品要消耗掉 $a_{ij}^{(0)}$ 个单位的第 j 类产品.

以 (3) 式代入 (1) 式得到

$$x_j^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(0)} x_i^{(1)}, \tag{4}$$

或写成矩阵形式就是

$$\underline{\underline{\boldsymbol{x}}}^{(0)} = \underline{\underline{\boldsymbol{x}}}^{(1)} A, \tag{5}$$

或

$$\underline{\underline{\boldsymbol{x}}}^{(1)} = \underline{\underline{\boldsymbol{x}}}^{(0)} A^{-1}, \tag{6}$$

这里 $A = (a_{ij}^{(0)})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$ 称为第一年度的消耗系数方阵或结构方阵.

如果消耗系数方阵 A 不因年份而变, 那么连续施行 l 次, 便得到第 l 年所得的产综

$$\underline{\underline{\boldsymbol{x}}}^{(l)} = \underline{\underline{\boldsymbol{x}}}^{(0)} A^{-l}. \tag{7}$$

特征矢量法

命 g 表示 A 的最大正特征根. 已知*对不可分拆的 A, 相应于 g 有 (除相差一比例正因子外) 唯一的正元素矢量 $\underline{\underline{u}}$ 使

$$\underline{\underline{u}}A = g\underline{\underline{u}}; \tag{8}$$

同样有唯一的正元素矢量 $\underline{\underline{v}}$ (除一比例正因子外) 使

$$A\underline{\underline{v}}' = g\underline{\underline{v}}', \tag{9}$$

这里 $\underline{\underline{v}}'$ 表示 $\underline{\underline{v}}$ 的转置列矢量.

如果 $x^{(0)}$ 就是特征矢量 $\underline{\underline{u}}$ (习知对应于 g 的其他正元素特征矢量一定等于 $\alpha\underline{\underline{u}}$, α 是一正数), 那么由归纳法容易证明

$$\underline{\underline{\boldsymbol{x}}}^{(l)} = \frac{1}{g^l}\underline{\underline{\boldsymbol{x}}}^{(0)}. \tag{10}$$

这说明了, 如果 $\underline{\underline{\boldsymbol{x}}}^{(0)}$ 是 A 的特征矢量, 也就是说, 如果 投入生产的产综各部分正好按特征矢量各分量的比例安排, 那么各部门的生产量都将以$1/g$的倍数成倍 增长, 并且 可以证明增长速度不可能超过$1/g$. 即 现阶段的生产情况下, 如依$\underline{\underline{u}}$的比例组织安排生产, 将会得到最高的增长速度.

不仅如此, 还可以证明: 如果$\underline{\underline{\boldsymbol{x}}}^{(0)}$ 与 $\underline{\underline{u}}$ 不成比例, 则生产情况一定会失去平衡, 最后出现危机.

对这一点这里先暂不证明, 但举一例子以明其意义.

例　　子

我们且不谈一般的 n, 而取 $n = 2$. 如果 $\underline{\underline{\boldsymbol{x}}}_0$ 与 $\underline{\underline{u}}$ 不成比例, 我们将说明一定会出现危机. 假定农业的标号是 1, 制造业的标号是 2.

* 华罗庚, 高等数学引论余篇,§4, 定理 1. 待发表.

我们以农业产量是 45 个单位, 制造业产量是 20 个单位开始, 即 $\underline{\underline{x}}^{(0)} = (45, 20)$. 消耗系数方阵为

$$A = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 25 & 14 \\ 40 & 12 \end{pmatrix}.$$

容易算得它的逆方阵为

$$A^{-1} = \frac{5}{13}\begin{pmatrix} -12 & 14 \\ 40 & -25 \end{pmatrix}.$$

A 的唯一 (除相差一比例因子外) 正元素特征矢量为

$$\underline{\underline{u}} = \left(\frac{5}{7}(\sqrt{2407}+13), 20\right) \doteq (44.34397483, 20).$$

表 2

年份 \ 产量	农产品	制造业产品	生产增长倍数	
原　来	45	20	农业	制造业
第一年	100	50	2.2	2.5
第二年	307.7	57.7	3.08	1.15
第三年	−532.5	1102.1	出现负值, 无法生产下去	

如果取初始产综为 $\underline{\underline{x}}^{(0)} = (45, 20)$, 由表 2 可见 $\underline{\underline{x}}^{(3)} = (-532.5, 1102.1)$, 也就是说, 到第三年就出现了负号, 这是绝对不允许出现的现象. 这个例子说明, 第一年还好, 第二年比例失调, 第三年生产不下去了. 农业出现负值时, 表示在第三年某一时刻, 农业原料消耗光了. 现在取 $\underline{\underline{x}}^{(0)}$ 为精确到三位小数的 $\underline{\underline{u}}$, 也即 $\underline{\underline{x}}^{(0)} = (44.344, 20)$, 由表 3 可见到前四年都是稳定的生产增长率 2.32 倍, 第五年开始失去平衡, 第八年垮了.

表 3

年份 \ 产量	农产品	制造业产品	农产品增加倍数	制造业产品增加倍数
原　来	44.344	20		
1　年	103.02	46.466	2.323	2.323
2　年	239.37	107.95	2.323	2.323
3　年	556.11	250.86	2.323	2.323
4　年	1292.80	582.24	2.324	2.320
5　年	2990.60	1362.90	2.313	2.340
6　年	7165.50	2998.20	2.395	2.199
7　年	13054	9754.70	1.821	3.253
8　年	89821	−23501	出现负值, 无法生产下去	

又如更精密些, $\underline{\underline{x}}^{(0)}$ 为精确到八位小数的 $\underline{u}$, 即 $\underline{\underline{x}}^{(0)} = (44.34397483, 20)$, 则由表 4 可见, 前八年的生产有稳定的增长率 2.323, 而负号在第十三年时出现. 值得指出的是: 命 $\alpha = 44.34397483$, 则负号在 $\underline{\underline{x}}^{(13)}$ 中出现, 但如果用 $\alpha \pm 10^{-8}$ 来代替, 那么在 $x^{(12)}$ 中就出现负号. 由此看出经济系统的敏感性, 可不慎哉.

表 4

年份 \ 产量	农产品	制造业产品	农业产品增加倍数	制造业产品增加倍数
原　来	44.34397483	20		
1　年	103.0278084	46.46755677	2.323377840	2.3233777838
2　年	239.3725266	107.9616920	2.323377835	2.323377847
3　年	556.1528311	250.8357971	2.323377870	2.3233779787
4　年	1292.153043	582.7864257	2.323377624	2.3233778211
5　年	3002.161733	1354.031525	2.323379376	2.323375195
6　年	6975.123164	3145.952354	2.323366888	2.323396682
7　年	16206.39085	7308.813628	2.323455868	2.323243585
8　年	37644.55958	16988.12738	2.322821899	2.324334461
9　年	87611.68481	39354.09595	2.327339880	2.316564684
10　年	201086.0079	93350.45708	2.295196221	2.372064579
11　年	508071.6108	185170.2630	2.526638308	1.983603174
12　年	503827.3809	955286.9140	0.9916463942	5.158965043
13　年	12371364.61	−6472534.430	出现负值, 无法计算下去	

附　记

也许有人会提出特征值与其特征矢量的计算比较困难. 对于大的 n, 例如当 n 等于几百或上千时, 有关特征值和特征矢量的计算, 大型计算机也有一定的困难. 但这个困难是一般会灵活巧用现代计算技术的人所能克服的. 不仅如此, 对给定的 $\underline{\underline{x}}^{(0)}$ 与消耗系数方阵 A, 我们还能够算出能平衡多少年, 以及多少年后将会出现危机等等. 有关这些, 就不在这里多说了. 熟悉计算的同志不难补出.

参 考 文 献

[1] 马克思恩格斯回忆录第一册“摩尔和将军”, 人民出版社, 1982, 93.
[2] 涅姆钦诺夫, 经济数学方法和模型, 商务印书馆, 1981, 12–13.

计划经济大范围最优化的数学理论

(II) 消 耗 系 数

(III) 正特征矢量法的数学证明

华罗庚

(中国科学院, 北京)

(II)

消耗系数如何求得? (I) 中讲过用公式

$$a_{ij}^{(0)} = x_{ij}^{(0)}/x_i^{(1)}$$

来求, 实际上也可以用统计方法求得.

以炼钢耗煤为例, 每一钢厂的每一炉钢都有记录用煤多少, 累积一个月, 可以算得月平均数及其标准离差. 同样也可以计算得年平均数及其标准离差. 国家可以根据各钢厂的产量来加权平均, 得出炼一吨钢要用多少煤的消耗系数. 这样做至少有以下几个好处: (1) 分清理白, 不至于把生活用煤及其他消耗 (如运输消耗) 都混在一起; (2) 各厂之间可以比先进; (3) 可以经常与世界先进水平比较; (4) 奖励先进有标准, 同时对那些厂应当进行技术更新, 或淘汰关停有了依据.

这里也顺便提出一个纯数学问题. 把 a_{ij} 看成随机变量, 如果 a_{ij} 的平均值是 $\bar{a}_{ij}$, 标准离差是 σ_{ij}, 问 A 的最大特征值的分布参数是什么? 另一问题是假设 $A^{(i)}(i=1, \cdots, l)$ 的分布参数为已知, 问 $\left(\prod\limits_{i=1}^{l} A^{(i)}\right)^{1/l}$ 的分布参数如何 (再进一步, 极限

$$\lim_{l\to\infty}\left(\prod_{i=1}^{l}\frac{A^{(i)}}{g(A^{(i)})}\right)$$

的情况如何? 这里 $g(A^{(i)})$ 是 A^i 的最大正特征根, 又为了保证极限的存在, 必须添加那一些合理的假设)?

这套数学方法也许对其他科学领域也有用处. 人们熟知 $x^{(0)}A^l$ 型问题的用途了, 但现在讨论的是 $x^{(0)}A^{-l}$ 型的问题. 这种考虑可能会有一些新的苗头, 但这儿不准备深入.

本文只准备指出两个简单的性质. 这些性质在直觉上是正确的, 但是为了数学严格性, 还是给它一个数学证明.

若方阵 A, B 满足 $a_{ij} \leqslant b_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$, 就用 $A \leqslant B$ 表示之.

定理 1　假定非负方阵 A 是不可分拆的. 则由 $A \leqslant B$ 可以推出 $g(A) \leqslant g(B)$.

证　不难证明

$$\lim_{l\to\infty}\left(\frac{\operatorname{tr}(A^l)}{n}\right)^{\frac{1}{l}} = g(A),$$

而 $\operatorname{tr}(A^l)$ 是 a_{ij} 的非负系数多项式, 因此由 $a_{ij} \leqslant b_{ij}$ 立刻得到

$$\frac{\operatorname{tr}(A^l)}{n} \leqslant \frac{\operatorname{tr}(B^l)}{n},$$

已明所证. 由此得

定理 2　任何一个消耗系数的降低只会提高而不会减低生产的增长率.

降低消耗系数的方法可以根据专业的情况进行技术革新或引进新工艺等等. 但最一般和易用的办法是利用“优选法”. 这个方法技术人员及工人易于学会, 并且可以在不影响生产的情况下进行.

如果经过对比, 发现某一生产部门的消耗系数和国内外先进水平有差距, 并且经过计算, 知道这一系数的改进将对速度的增长有较大的影响, 则我们就可以有根据地定出研究课题. 并且他们是发展生产中的关键课题. 这比起从文献到文献找寻研究课题要有根据些, 对生产更有利益些 (也许这也可以给负责领导全面科学研究的同志们, 添了一个辅助决策的工具, 而不至在“公说公有理, 婆说婆有理”的情况下无所适从, 难分先后. 这样选出来的研究课题能符合实际需要, 那就更无待言了).

由此可以看到, 我们整个理论建筑在消耗系数方阵上. 有了这方阵的正特征矢量, 支量间的比例就是我们各种生产的产量的比值. 其最大特征根的倒数, 就是我们产量增加的倍数. 每一种产品的增加倍数都是一样的, 这就是实现了按比例增加. 照这种比例, 增长速度最快.

附记: 1. 用这方法来得到消耗系数方阵可能更恰当些. 但在全面考虑中, 用原来所用的方法则较为简易. 2. 以下的事实在今后作概率计算时可能有用, 也附录于此. 问题:

(1) 特征根 $g \leqslant G$, 特征矢量 $\mu > \varepsilon$ 的非负矩阵的密率.

我们可以证明适合于 (1) 的 $A \geqslant 0$ 的密率可以分三部分 (即 Jacobian). (i) 与 g 相关的; (ii) 与 μ 相关的;(iii) 与 Stochastic 方阵有关的. 这也许将来对已知 a_{ij} 的概率分布而求出 g 的概率分布有关. 也就是当知道 a_{ij} 的误差分布, 可以算出 g 的

本文 1983 年 10 月 18 日收到.

误差分布. 这问题可能有其理论上的价值. 但与本文关系不大, 我们就留给研究概率理论的同志们去考虑了.

(III)

在（I）中我们仅举一个简单的例子, 两种产品的数学例子, 说明了从消耗系数出发, 研究生产按同一比例增加发展最快的问题. 一般讲来 n 类产品的生产按同一比例 λ 增长的数学表达式是

$$\lambda=\frac{x_1^{(1)}}{x_1^{(0)}}=\frac{x_2^{(1)}}{x_2^{(0)}}=\cdots\cdots=\frac{x_n^{(1)}}{x_n^{(0)}}, \tag{1}$$

用矢量符号表达就是

$$\lambda \boldsymbol{x}^{(0)}=\boldsymbol{x}^{(1)}. \tag{2}$$

由（I）的 (6) 式可知 $x^{(1)}=x^{(0)}A^{-1}$, 以此代入 (2) 式得

$$\lambda \boldsymbol{x}^{(0)}=\boldsymbol{x}^{(0)}A^{-1}, \tag{3}$$

即 λ^{-1} 是 A 的正特征根, 其对应的特征矢量是 $\boldsymbol{x}^{(0)}$, 而且 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 是正特征矢量, 用 $\boldsymbol{x}^{(0)}>0$ 表之.

由 Perron-Frobinuis 定理*, 一个不可分拆的非负方阵 A(用 $A\geqslant 0$ 表之), 一定有一个正的最大特征根 g, 其对应的特征矢量 μ 是正的 (也就是 μ 的每一支量都是正的), 而且正特征矢量只有一个 (可能相差一个正倍数 α, 即 $\alpha\mu$ 也是正特征矢量). (因此, 各部门要按同一比例发展就必然有 $x^{(0)}=\alpha\mu$, 其增长率一定就是 $\lambda=1/g$.

依这方法生产, 则称为正特征矢量法.

我们现在研究一个反问题, 如果 $\boldsymbol{x}$ 不是特征矢量, 是否还能保持

$$\boldsymbol{x}A^{-l},\quad l=1,2,\cdots\cdots \tag{4}$$

永远是正矢量, 用符号 $\boldsymbol{x}A^{-l}>0$ 记之.

显然有一反例, 如果 A 是广义置换方阵, 则 A^{-1} 也是非负方阵, 因此常有 $\boldsymbol{x}A^{-l}>0$,

除此之外, 还有其他 A 有此性质否? 回答是以下的:

定理 1 (基本定理) 命 A 是一不可分拆的原非负方阵, 则任何一非 A 的正特征矢量 $\boldsymbol{x}$, 必有一 $l_0(>0)$, 使 $l\geqslant l_0$ 时

$$\boldsymbol{x}A^{-l}, \tag{5}$$

*华罗庚, 高等数学引论余篇, 第九章 §4, 定理 1、2, 待发表.

一定是变号矢量, 即此矢量有些分量是正, 有些是负.

这一定理的证明较长, 不在此给出了. 但解释一下上面所提到的一些数学概念. 当然这对已读过拙著"高等数学引论余篇"的同志就是多余的了.

首先是广义置换方阵, 这方阵每一行 (及每一列) 只有一个正数. 这些方阵成一群, 称为广义置换群 G, 例如

$$A=\begin{pmatrix}0&\lambda_1&0\\0&0&\lambda_2\\\lambda_3&0&0\end{pmatrix},\quad A^2=\begin{pmatrix}0&0&\lambda_1\lambda_2\\\lambda_2\lambda_3&0&0\\0&\lambda_3\lambda_1&0\end{pmatrix},$$

$$A^3=\lambda_1\lambda_2\lambda_3 I,\cdots\cdots.$$

其次, 可分拆方阵 A, 是指在群 G 中, 有一元素 T 使

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}A_1&A_2\\0&A_3\end{pmatrix},$$

这儿 $A_1=A_1^{(l)}$, $A_3=A_3^{(n-l)}$, $A_2=A_2^{(l,n-l)}$. 如果 $A_2=0$, 则 A 称可完全分拆.

原方阵是指不存在一个正数 q 使 A^q 是完全可分拆.

我所以重复这些概念, 是为了在以后更易于看出问题的本质.

虽然本文中将不证明这一基本定理, 但其重要含义我们必须指出: 如果 $\boldsymbol{x}$ 不是消耗系数方阵的特征矢量, 总有一天我们的经济系统是要失调的, 甚至于要崩溃的. 但一切数学不能无限精密, 因此, 稍一不慎就要失去平衡, 甚至于崩溃. 这说明了一条哲学原理: 任何经济系统平衡是暂时的, 不平衡是经常的.

如果我们掌握了这一规律, 只要不断进行小调整, 就可以使我们的生产系统不断在平衡部位附近有小摆动, 不至于出现大危险了.

另一标准也可以得出正特征矢量法是最好的.

定理 2

$$\max_{\boldsymbol{x}^{(0)}>0}\min_{l\leqslant i\leqslant n}\frac{x_i^{(1)}}{x_i^{(0)}}=\frac{1}{g}.$$

证 不妨假定

$$\lambda=\frac{x_1^{(1)}}{x_1^{(0)}}=\cdots=\frac{x_j^{(1)}}{x_j^{(0)}}<\frac{x_{j+1}^{(1)}}{x_{j+1}^{(0)}}\leqslant\cdots\leqslant\frac{x_n^{(1)}}{x_n^{(0)}},\tag{6}$$

这儿

$$x_l^{(0)}=\sum_{k=1}^n a_{kl}x_k^{(1)}.$$

i) $j=1$. 如果 $a_{21}=a_{31}=\cdots=a_{n1}=0$, 则 A 是可分拆的方阵. 如不然, 不妨设 $a_{n1}\neq 0$, 以 $x_n^{(1)}-\varepsilon$ 代替 $x_n^{(1)}$, 则 $x_1^{(1)}/x_1^{(0)}$ 的分母 $x_1^{(0)}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{k1}x_k^{(1)}$ 减少了, 即

$$\frac{x_1^{(1)}}{x_1^{(0)}}>\lambda.$$

我们可以取适当小的 ε, 使

$$\lambda<\frac{x_i^{(1)}}{x_i^{(0)}},\quad (2\leqslant i\leqslant n).$$

这说明, 我们找到了另一个 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 使

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{x_i^{(1)}}{x_i^{(0)}}>\lambda.$$

ii) $1<j<n$. 如果

$$\begin{pmatrix} a_{j+1,1} & a_{j+1,2}, & \cdots & a_{j+1,j}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j}\end{pmatrix}=0,$$

则 A 可分拆, 不然可用上法使 (6) 式左边大于 λ.

因此可知 $\dfrac{x_i^{(1)}}{x_i^{(0)}}$, $1\leqslant i\leqslant n$ 中只要有两个不等, 我们一定可以找到一个更大的 $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\dfrac{x_i^{(1)}}{x_i^{(0)}}$. 当且仅当 $x_i^{(1)}=\lambda x_i^{(0)}=\lambda\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ki}x_k^{(1)}$ 时取极值, 即 λ^{-1} 是特征根, $\boldsymbol{x}^{(1)}$ 是正特征矢量. 而正特征矢量仅有一个, 故得定理.

本定理的意义是, 如果以 $\max\limits_{\boldsymbol{x}^{(0)}>0}\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\dfrac{x_i^{(1)}}{x_i^{(0)}}$ 作为衡量增长速度的标准, 则必然以特征矢量法为最好.

计划经济大范围最优化数学理论

(IV) 数学模型 (矛盾论的运用)

(V) 论调整

(VI) 生产能力的上限, 表格

华罗庚

(中国科学院, 北京)

(IV)

也许有人认为“你所讨论的数学模型是片面的, 既没有考虑到外界投入的产量, 又没有考虑到消费, 而把所生产出来的全部都投入了再生产”. 这批评是对的, 但这正是关键所在.

马克思 (1818–1883) 在他的不朽名著“资本论”中早就指出了社会的总生产分为两个部类: 第一部类是生产资料的生产, 第二部类是消费品的生产. 后来凯恩斯 (1883–1946) 也在全部生产支出中把用于消费的支出和用于生产的投资分开.

列昂节夫创造性地提出了投入产出法是一个重要贡献, 但他把性质不同的两类型合在一个表上, 算出消耗系数表, 因而导致混淆, 因此涅姆钦诺夫认为:“整个生产过程的最优化, 是很复杂的问题, 为了解决这种最优任务暂时还没有创立相应的数学方法, …… 对大范围的经济行为进行数学描述, 大概只有在不远的将来才有可能.”

实质上, 按照矛盾论的思想, “不同质的矛盾, 只有用不同质的方法才能解决”. 在出现了矛盾之后, 首先要分主要的和次要的. 当然在经济邻域里第一部类的产品是主要的, 因为没有生产也就没有消费了. 所以我们先研究只有第一部类的模型, 我们就引进了正特征矢量法. “捉住了这个主要矛盾, 一切问题就迎刃而解了”. 这是我们先研究第一部类, 而以后再研究包括第二部类的思想方法的背景.

从数学角度来讲, 非负方阵核心是不可分拆的部分. 如果笼统地研究非负方阵, 不区别不可分拆与可分拆, 则正特征矢量可能不存在, 也可能有无穷个, 这样混淆就难于处理了. 而先弄清不可分拆的情况, 可分拆的情况也就较易于处理了. 在处理这个问题时, 我们体会到哲学、经济学、数学间联系的重要性. 当然马克思主义的哲学思想是根本, 数学仅是工具, 被利用到经济学上来的工具之一. 从为数众多

的投入产出法的资料也看到了生产资料部类所列出的消耗系数方阵一般是不可分拆的, 而行政开支, 国防费用, 文化教育, 输入输出往往都使结构方阵成为可分拆方阵.

实质上包括第二部类产品后的数学模型可以概括成为

$$\boldsymbol{x}^{(l)} - \boldsymbol{\xi}^{(l)} = \boldsymbol{x}^{(l+1)}A, \tag{1}$$

这里的 $\boldsymbol{\xi}^{(l)}$ 包括政府的开支, 人民的生活、文化和教育, 对外出口, 减去对内的进口 (注意 $\boldsymbol{\xi}^{(l)}$ 前是负号), 投资折旧等等. 一般地说,$\boldsymbol{\xi}^{(l)}$ 这个矢量不属于具体工作者所掌握, 大都由政府的政策决定. 但可能领导先给出若干指示, 然后根据这些指示, 由具体工作的同志做出不同方案, 分析哪些是可能的, 哪些是不可能的, 对可能的计划连同经济指标, 提供领导作最后的决策. 必须指出, 有时通过输出或其他手段减少某些产品的数量, 反而会有助于而不是减慢我们的经济发展 (见 I 所举的例子). 输入更是应当用来加强而不是破坏或扰乱我们的平衡. 总之, 以正特征矢量的支量比为依据.

现在用 $\boldsymbol{\beta}^{(0)}$ 表示一个暂不确定的矢量. 一旦 $\boldsymbol{\beta}^{(0)}$ 决定后, 就可由

$$\boldsymbol{\xi}^{(l)} = \boldsymbol{\beta}^{(l+1)}A - \boldsymbol{\beta}^{(l)}, \quad l = 0, 1, \cdots \tag{2}$$

逐个定出 $\boldsymbol{\beta}^{(l)} (l = 1, 2, \cdots)$ 来. 由 (1) 与 (2) 式可得

$$\boldsymbol{x}^{(l)} + \boldsymbol{\beta}^{(l)} = (\boldsymbol{x}^{(l+1)} + \boldsymbol{\beta}^{(l+1)})A,$$

这样就与 (1) 式中表达的形式相同了.

如果取 $\boldsymbol{\beta}^{(0)}$ 使 $\boldsymbol{x}^{(0)} + \boldsymbol{\beta}^{(0)}$ 是正特征矢量 $\boldsymbol{u}$, 则由归纳法可以算出

$$\boldsymbol{x}^{(l)} + \boldsymbol{\beta}^{(l)} = \frac{1}{g^l}(\boldsymbol{x}^{(0)} + \boldsymbol{\beta}^{(0)}) = \frac{1}{g^l}\boldsymbol{u},$$

当然我们应当重新检查 $\boldsymbol{x}^{(l)}$ 是否是非负矢量.

总之, 我们的问题归纳为有了 $\boldsymbol{\xi}^{(l)}$, 要确定 $\boldsymbol{\beta}^{(l)}$. 用归纳法可以证明

$$\boldsymbol{\beta}^{(l+1)} = (\boldsymbol{\xi}^{(0)} + \boldsymbol{\beta}^{(0)})A^{-(l+1)} + \boldsymbol{\xi}^{(1)}A^{-l} + \cdots + \boldsymbol{\xi}^{(l)}A^{-1}, \tag{3}$$

这说明: 如果在输出输入、政府开支、人民生活等方面, 通过适当选取使 $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{\xi}^{(l)}$ 成为 A 的特征矢量, 这样不但有利于生产, 而且使我们的计算也大大化简.

当然也可以从 (2) 式或等价的

$$\boldsymbol{\beta}^{(l+1)} = (\boldsymbol{\xi}^{(l)} + \boldsymbol{\beta}^{(l)})A^{-1}, \tag{4}$$

本文 1983 年 10 月 18 日收到.

逐个地定出 $\beta^{(l)}$, 然后问矢量 $\boldsymbol{x}^{(l)}+\boldsymbol{\beta}^{(l)}$ 是否含有负的分量? $\boldsymbol{\xi}^{(l)}$ 由政策决定. 如果能够给出一个大致的要求, 例如政府的开支每年增加的比例如何? 人民生活的增长速度又如何等等, 假如这些都依一定的规律变化, 那么我们的预测也就可以更可靠了, 也就是预测的可靠性, 固然一方面依靠预测者的水平, 而更重要的是政府的决策.

(V)

前面已经说明: n 维空间第一象限中的任何一点都可以成为初始产综 $\boldsymbol{x}^{(0)}$, 而能保证以最高经济增长率发展的 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 则组成 n 维空间中的一条直线, 也就是全体正特征矢量构成的射线称为特征矢量线. 所以不仅少到了是测度为零的问题, 而且还仅仅是 n 维空间的一条射线的点集. 所以能达到最高增长率的可能性渺渺乎其小哉! 如果让生产系统自然发展而不加以控制, 必然会走上不平衡的道路, 最后导致危机.

现在来考察一个给定矢量 $\boldsymbol{x}$ 与正特征矢量线的距离. 设 $\boldsymbol{u}$ 是一正特征矢量, 则 $\boldsymbol{x}$ 与正特征矢量 $\alpha\boldsymbol{u}(\alpha>0)$ 间的距离平方为

$$(\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{u})\ (\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{u})'.$$

因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'-&2\alpha\boldsymbol{u}\boldsymbol{x}'+\alpha^2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}\\&=\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'(\alpha-\boldsymbol{u}\boldsymbol{x}'/\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}')^2+\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'-(\boldsymbol{u}\boldsymbol{x}')^2/\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'\\&\geqslant\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'-(\boldsymbol{u}\boldsymbol{x}')^2/\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}',\end{aligned}$$

所以当 $\alpha=\boldsymbol{u}\boldsymbol{x}'/\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'$ (设为 $\bar{\alpha}$) 时, 该距离最小, 也即 $\boldsymbol{x}$ 与特征矢量线的距离平方为

$$\varepsilon(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'-(\boldsymbol{u}\boldsymbol{x}')^2/\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'.$$

因为用 $\alpha\boldsymbol{u}$ 代替 $\boldsymbol{u}$ 后, $\varepsilon(\boldsymbol{x})$ 的值不变, 所以它是一个与特征矢量 $\boldsymbol{u}$ 的选取无关的数. 如果

$$\varepsilon(\boldsymbol{x})=0,$$

则 $\boldsymbol{x}$ 就是一特征矢量; 而若

$$\varepsilon(\boldsymbol{x})\leqslant\varepsilon^2,$$

则肯定有

$$|x_i-\bar{\alpha}_iu_i|\leqslant\varepsilon\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

也就是 $\boldsymbol{x}$ 与 $\bar{\alpha}\boldsymbol{u}$ 的对应分量相差都不超过 ε.

有了"正特征矢量法", 就有了标准, 例如各部门生产能力的比例如何？我们希望它们间的比例能够符合正特征矢量各分量间的比例, 从而可使经济以最高速度发展. 不然也希望 $\varepsilon(\boldsymbol{x})$ 越小越好.

人民生活所需和政府开支可能有些伸缩性, 对输入输出我们也有主动权, 可以希望作为一个总体投入生产的数量符合正特征矢量分量间的比例. 有了最大特征根及正特征矢量, 一切计算都简化了.

注意: 如果不加调整, 任其自然发展, 经济一定会走上崩溃之路 [见 (III)], 崩溃的现象出现于 $\boldsymbol{x}^{(l)}$ 含有负分量之时.

结论: "调整" 不是头痛医头, 脚痛医脚, 必须经过全面计算, 找出方案来. "正特征矢量法" 正是解决这个问题的方法, 而且理论证明: 只有用此法才好. 不然拍拍脑袋抓重点, 将会失去平衡; 失去平衡而不及时调整, 则难免成为不可收拾的局面. 当然调整是不可避免的, 因为以上理论证明了不平衡性是经常的, 而平衡是短暂的. 在了解了与正特征矢量的差距后, 我们可以主动地加以控制, 使经济系统在平衡附近变化, 不使其出现 $\varepsilon(\boldsymbol{x})$ 太大. 有如这是一个方向盘, 领导掌握之后, 可以控制全局, 不断进行小调整, 使其不要太远地偏离我们的主要航道, 然后来个急转弯.

(VI)

这里先顺便介绍一下著名的 Leontief 方法的数学实质. 前面说过

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \boldsymbol{x}^{(1)}A, \tag{1}$$

因此

$$\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(0)} = \boldsymbol{x}^{(1)}(I - A). \tag{2}$$

这几行就叙述了 Leontief 方法. 对于 $(I-A)^{-1}$ 的计算, Leontief 建议[1)]用

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k, \tag{3}$$

为此需要计算 A 的每一个乘幂 $A^k(k = 1, 2, \cdots)$. 但是, 事实上早在 1960 年以前[2)]就知道, 只需要计算 $A, A^2, \cdots, A^{2^k}, \cdots$ 等乘幂便已足够, 这是因为

$$(I + A)(I + A^2)\cdots(I + A^{2^m}) = \sum_{k=0}^{2^{m+1}-1} A^k. \tag{4}$$

1)Leontief 著, *Input-Output Economics*, 第七章, 第九节, 第 151 页.

2)华罗庚, 高等数学引论余篇, 1961 年, 比较 A. R. Gourlay 与 G. A. Watson 所著的"矩阵特征值问题的计算方法" (1973 年) 第四章.

故若命 $B_0 = I + A$,

$$B_k = B_{k+1}(I + A^{2^k}) = B_{k-1} + B_{k-1}A^{2^k}, \tag{5}$$

可见 B_k 将以很快的速度收敛于 $(I - A)^{-1}$.

附记：如果 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 是正特征矢量, 则 (2) 式简化为

$$\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(0)} = \left(\frac{1}{g} - 1\right)\boldsymbol{x}^{(0)}.$$

无论我们前面介绍的方法, 还是现在所介绍的 Leontief 的方法, 都有一个缺点, 就是没有考虑生产能力限制的问题, 也就是说, 如果由 (1) 式得出的 $\boldsymbol{x}^{(1)}$ 有一个分量超过了现有的生产能力, 这时任务就无法完成, 怎么办?

我里我们建议用线性规划来处理. 用 $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$ 表示产品的价值矢量, 也就是说：$q_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是每一 p_i 单位第 i 类产品的价值; 又用 $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 表示生产能力的上限; 也即按现有水平在下一年度中最多能生产出第 i 类产品 ξ_i 个 p_i 单位. 于是问题变成：应当投入多少产品, 也即求 $\boldsymbol{x}$, 使 $\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{x}A^{-1}$ 即能满足生产能力的限制, 又能使总产值 $\boldsymbol{x}^{(1)}q'$ 达到最大. 因为 $\boldsymbol{x}$ 自然受到 $0 \leqslant \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{x}^{(0)}$ 的约束限制, 又按要求 $\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{x}A^{-1}$, 须满足

$$0 \leqslant \boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{x}A^{-1} \leqslant \boldsymbol{\xi},$$

所以得到线性规划

$$\max_{\substack{0 \leqslant \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{x}^{(0)} \\ 0 \leqslant \boldsymbol{x}A^{-1} \leqslant \boldsymbol{\xi}}} \boldsymbol{x}A^{-1}\boldsymbol{q}' \tag{6}$$

当然用线性规划必须会导致整个规划受制于一种或少数几种产品生产能力的问题, 也就是其他产品的生产能力没有充分发挥. 怎样才能充分发挥各部门的生产能力, 自然的要求是各部门生产能力之比等于正特征矢量支量间的比, 即 $(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots, \xi_n)$ 也是正特征矢量. 而运用线性规划是权宜之计.

因此基本建设, 设备添置也应当服从于这一需要. 也就是说：应当对那些生产能力相对薄弱的部门进行投资, 添加设备, 以使各生产部门生产能力的比例更接近于正特征矢量各分量之比.

在出现上一节中所讨论的 $\boldsymbol{x}^{(1)} \nleqslant \boldsymbol{\xi}$ 的问题时, 首先应当考虑给薄弱部门添加设备, 增加其生产能力, 以使 $\boldsymbol{x}^{(1)} \leqslant \boldsymbol{\xi}$ 得以满足 (如果做不到这一点, 也该在可能条件下, 改变 $\boldsymbol{\xi}$, 主要是使 $\boldsymbol{\xi}$ 尽可能地与正特征矢量接近).

用上面的方法确定了应当对哪些部门增加投资添置设备. 剩下的问题是应当在哪些地区或工厂, 以何种方式添置怎样的设备. 例如电力不足, 那么应当发展火力发电, 还是水力发电或是核力发电; 电站应当设在何处等等. 有关这些问题, 自然

要做一番调查研究与论证工作. 但看来最后还得依靠统筹优选来精打细算地安排, 既要注意到建设过程中何时何物达到何处, 才能使之工期最短, 最快投入生产, 又要考虑到建成后对于生产的得益最大的问题. 提高生产能力超过需要而达到窝工的程度更是不允许了.

在以下几篇摘要的基础上, 我们可以提出生产综合计划表 (表 1), 供实际工作者参考.

说明:

1) 基本建设可能不是一年能完成的. 对每一基建项目, 都该有一统筹图, 用来说明完工的日期. 完工后能增加哪些部门的生产能力, 即对 ξ 的改变 (当然, 分几步完成的基本建设, 应步步添加到 ξ 上去).

2) 我们必须检查是否 $\boldsymbol{y} \leqslant \boldsymbol{\xi}$.

表 1

生产部门的标号		1	2	⋯	i	⋯	n	矩阵形式及算法
生产能力的上界		ξ_1	ξ_2	⋯	ξ_1	⋯	ξ_n	ξ
投入产综	内部产综	a_1	a_2	⋯	a_i	⋯	a_n	a
	外部产综	b_1	b_2	⋯	b_i	⋯	b_n	b
	…………	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯
投入总产综		x_1	x_2	⋯	x_i	⋯	x_n	$x=a+b+\cdots$
消耗系数方阵	1	a_{11}	a_{12}	⋯	a_{1i}	⋯	a_{1n}	A
	2	a_{21}	a_{22}	⋯	a_{2i}	⋯	a_{2n}	
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	
	j	a_{j1}	a_{j2}	⋯	a_{ji}	⋯	a_{jn}	
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
	n	a_{n1}	a_{n2}	⋯	a_{ni}	⋯	a_{nn}	
计划产出产综		y_1	y_2	⋯	y_i	⋯	y_n	$y=xA^{-1}$
消费产综	行政开支	c_1	c_2	⋯	c_i	⋯	c_n	$\boldsymbol{c}$
	国防开支	d_1	d_2	⋯	d_i	⋯	d_n	$\boldsymbol{d}$
	输出	e_1	e_2	⋯	e_i	⋯	e_n	$\boldsymbol{e}$
	……	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯
消费总产综		z_1	z_2	⋯	z_i	⋯	z_n	$z=c+b+e+\cdots$
基建产综		f_1	f_2	⋯	f_i	⋯	f_n	f
净余产综		x'_1	x'_2	⋯	x'_i	⋯	x'_n	$x'=y-z-f$

3) 关于输入输出部分该另有细则. 何时该偿还, 何时可收回, 作为今后做表的根据.

4) 根据本年底的年终决算表 (或第一、二、三季度的数据), 修改消耗系数方阵, 作为下一年度计划的根据.

5) 这儿所用的各部门的生产单位, 当然也可以用人民币来计算. 但建议在价格接近下章所标出的成本价格时再加以重用, 更为合适.

6) 当然还有各种各样由投入产出法派生出来的表格, 也可以弃其糟粕, 取其精华, 依此文所了解到的理论基础加以修改应用之.

7) 当然不要忘记先算出正特征矢量, 用此于 $\boldsymbol{\xi}$, x 来看其差异而进行一定的调整.

计划经济大范围最优化的数学理论

(VII) 论 价 格

华罗庚
(中国科学院, 北京)

各类产品的价格, 如何决定? 当然有人会立刻回答, 取决于市场需要, 特别是我们不能离开国际市场的正当和不正当的 (指投机、倾销和垄断等) 变化而独立. 其中包括人对人, 智囊团对智囊团的勾心斗角, 任凭你挖空心思寻得妙着, 但诚恐还有高手想到了你之所想, 提出了更高明的对策, 对此事, 我们何能多说.

我们是社会主义国家, 资源丰富, 并以自力更生为主, 外部影响可能小些 (但绝不能低估). 我们就事论事, 就现在所提的系统中, 论述这些知识. 首先说运用正特征矢量法的一个优点, 不管你用什么价值, 而生产发展的总产值都是 $1/g$ 倍. 其证明如次:

假定第 i 类产品每一 p_i 单位的产品价格是 q_i. 命 $\underline{\underline{q}} = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$ 代表价值矢量. 则产综 $\underline{\underline{x}}^{(0)}$ 的总产值等于 $\underline{\underline{x}}^{(0)}\underline{\underline{q}}'$. 由于 $\underline{\underline{x}}^{(1)} = \underline{\underline{x}}^{(0)}A^{-1}$, 所以下年度的总产值等于 $\underline{\underline{x}}^{(1)}\underline{\underline{q}}' = \underline{\underline{x}}^{(0)}A^{-1}\underline{\underline{q}}'$. 如果 $\underline{\underline{x}}^{(0)}$ 是正特征矢量, 则

$$\underline{\underline{x}}^{(1)}\underline{\underline{q}}' = \frac{1}{g}\underline{\underline{x}}^{(0)}\underline{\underline{q}}'. \tag{1}$$

由此可知, 只是 $\underline{\underline{x}}^{(0)}$ 是正特征矢量, 不管你价值矢量如何取, 总产值总是增加 $\frac{1}{g}$ 倍.

照这样说来是否价格可以任意取了, 当然不是的, 而依靠成本会有一个自然的价格.

已命第 i 类产品每一 p_i 单位的产品价格是 q_i, 则由于每一 p_i 单位第 i 类产品需要消耗 a_{ij} 单位的 j 类产品, 因此每一 p_i 单位产品的成本是

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j.$$

假定产品价格是按比例变化的, 则得

$$\lambda q_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j.$$

因此得

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \lambda = A \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix},$$

即 $\underset{=}{q}$ 是 A 的右正特征矢量. 由于 A 只有一个右正特征矢量, 因此价格的比也就是唯一的 $q_1 : q_2 : \cdots : q_n$, 而 λ 是 A 的最大特征根等于 g, 即成本价格下降 g 倍, 这也是我们直观所料到的事.

如此, 不可分拆方阵的一些重要概念: 最大特征根, 左正特征矢量, 右正特征矢量都有了经济学上的意义下.

关于劳动力的付酬问题表面上看来是简单的, 只要取 x_n 是劳动力 (或者把各种劳动力分类, 添上几个支量) 进行计算就行了, 但实际上比这复杂得多了. 因为不但有各种不同的技术水平, 而且有不可预先知道何时出现的创造发明的价值. 一个学校可以培养出无数的体力劳动者及脑力劳动者, 但也可能偶然出现一个出类拔萃的学生会成为富有创造性的科学家, 为国家创造大量财富的发明家. 科学就是生产力, 对技术革新、技术革命会带来难以数计的经济效果. 不但科研教育, 就是文化艺术的作用也是如此. 一般讲来, 可以把日常的体力脑力劳动力分类, 然后入算, 算出各种劳动应得的收入. 至于特殊发明创造, 可以在事成后予以精神鼓励或物质奖励.

在结束之前, 该说明几点:

1. 这套方法是“见林不见树”的方法, 给我们一个概观. 要深入树、干、枝、叶、根还得要用其他方法. 其中最主要的是“统筹”、“优选”两法.

2. 从 60 年代初在党的理论联系实际原则的教育下, 作者就注意这一问题了, 但在十年浩劫期间,“一拿、二抄、三盗窃”, 这方面的手稿荡然无存. 现在可以告慰于同志们了, 本文的结果远比原来的好了. 但如果收藏者仍能还我原稿, 我还是十分感激的, 因为其中还可能有值得发展的观点与方法. 本文证明, 与其保守地收藏了十年, 不如辛劳工作一年. 科学技术发展, 更新是根本.

3. 人贵有自知之明, 其一, 马克思主义的政治经济学我没有学得多少; 其二, 对现代资本主义社会的经济理论一无所知; 其三, 年逾七旬, 开始另走新路, 其精力不济, 力不从心是自然规律. 但由于其三, 更不得不以垂暮之年再为祖国尽一分力. 至于成败利钝, 就在所不计了.

4. 数据力求精确可靠. 因为一切规划都是建筑在原始数据的基础上的, 若原始数据不可靠, 绝不可能做出正确的计划及比较可靠的预测.

1983 年 8 月 21 日,《人民日报》报道了国家经委、国家计委、国家统计局、国务院及其有关部门将于 1985 年进行一次全国工业普查的决定. 其目的是查清 1984

本文 1983 年 10 月 18 日收到.

年我国工业各方面的家底，为编制长远计划和制订经济政策提供可靠数据，这是一个非常英明的措施，这也是我们以上所讲的“正特征矢量法”所必须依靠的基础.

我们前面已经说过，经济系统是非常之敏感的，往往开始差一小点，时间长了就会产生很大的出入. 我们很高兴从《人民日报》的报道上，知道领导已经重视数据了. 数据的精确与否也是科学管理 —— 一切科学的必须的要求；而数据的精确来源于基层，这也是近二十年我们到基层推广统筹、优选使工人、技术人员认识到数据可靠的重要性的一点区区心意.

5. 质量必须保证. 我们的数据是真正符合质量要求的产品数量，一些不符合质量要求，销售不出去的产品，不但不能算产量 (总值)，还应当计算由于它不能流通所损失的利息及收藏它们的仓库的栈租. 当然，改进质量的办法就是我们提过的优选法了，这是管理质量的好方法，这与二十年代的方法有根本区别：一是出了废品不再加工下去或不准出厂，一是选择合适的参数让它少出废品或不出废品. 次品不出厂，把好关还是重要的，用了优选法就可减少次品.

对这儿所谈的方法来说，这个方法的根本就是消耗系数方阵. 我们已经证明任一消耗系数的减少，都会增加生产增长的速度. 当然，应当组织有关专家们来搞某一消耗系数，但是一般讲来优选法是一个普遍可用的方法.

6. 基本建设问题. 基本建设的目的是什么？一般讲来是增加某一产品的生产能力. 所以我们必须弄清楚每种产品最高的可能生产能力是多少. 用“正特征矢量法”来进行比较，我们就可以发现有些产品生产能力是超过的，某些是不足的. 有了这个我们就知道哪些产品暂时不需要扩大它的生产能力，哪些产品急需扩大它的生产能力，根据这些情况，我们就可以安排基本建设. 在安排与施工的过程中，都需要统筹方法. 用统筹方法可以按轻重缓急来安排，在最短时间完成我们的基本建设，投入生产.

7. 人才的培养和机构的设立都要按经济效益来处理. 我们的培养是有目的性的. 对国外已经有的方法，我们要消化，要取其精华、去其糟粕地吸收过来. 国外的商业学院及企业管理的专业往往要求已经工作过二三年的人才能入学. 资本主义国家如此，我们就更是要遵守马克思主义基本原则，理论联系实际. 一个新方法的出现，不会是尽善尽美的. 如果我们培养出来的人不会独立思考，墨守成规，很明显这种人不会推陈出新，不但不能推动四化的前进，有时相反还会阻碍新事物的推广及发展.

赘言 在物理学及群体演变中，经常见到运用以下一套数学；设 $\underline{\underline{x}}^{(0)}$ 是初始矢量，A 为非负方阵，而

$$\underline{\underline{x}}^{(l)} = \underline{\underline{x}}^{(0)} A^l (l = 1, 2, \cdots, n, \cdots). \tag{1}$$

显然这是我们所考虑过的

$$\underline{\underline{x}}^{(-l)} = \underline{\underline{x}}^{(0)} A^{-l} (l = 1, 2, \cdots, n, \cdots) \tag{2}$$

的逆过程. 前者可以一直做下去以至无穷, 后者除 $\underline{\underline{x}}^{(0)}$ 是 A 的正特征矢量外, 一定出现 l 使 $\underline{\underline{x}}^{(-l)}$ 有负支量.

这说明如果现况是 $\underline{\underline{y}}$, 这过程是依规律 (2) 进行的, 则除 $\underline{\underline{y}}$ 是正特征矢量外, 一定可以找到 l_0 使 $\underline{\underline{y}}A^{-l_0}$ 是正矢量. 而 $\underline{\underline{y}}A^{-l_0-1}$ 有负支量.

这说明现象 $\underline{\underline{y}}$ 不可能是某正矢量经 l_0+1 步而达到的. 因此由现在的 $\underline{\underline{y}}$ 及演变规律 (2), 可以算出"开天辟地"的年代 l_0.

前面说过了一切过程 (2) 不是永久平衡的 (除极特殊的情况之外), 生物的群体有些消灭了 (有些变异出现了), 弱肉强食固然是规律, 但强肉弱食也是规律. 生态从来不是平衡的, 只有人类的智慧才能使生态不平衡的发展趋向于有利于人类, 防止不利于人类的生态发展. 以上一套数学的发展似乎有可能用到这些方面去.

物理学上也有同样的问题 (如核分裂), 也就是有一个发展的模型 (1), 由此模型倒退回去, 是否有一天出现不能再退的现象. 这说明或这模型是错误的, 或这种演变是有开始时刻的.

积分方程的形式是: 如果 $K(x,y)>0$, 定义

$$f_n(y) = \int_a^b K(x,y) f_{n-1}(x) dx,$$

显然当 $f_{n-1}>0$ 时,$f_n>0$. 反之, 给了 $f_n>0$, 我们可以证明: 一定有 l 存在, 使 $f_{n-l} \geqslant 0$. 当然我们应该除去 f 是正特征函数的情形, 也就是

$$f(y) = \lambda \int_a^b K(x,y) f(x) dx.$$

基本定理在研究 Morkov 过程时还有它的意义.

某一事件可能以第 $1,\cdots,n$ 种状态出现. 在第 l 时刻出现的可能性各为 $p_1^{(l)},\cdots,p_n^{(l)}, p_1^{(l)}+\cdots+p_n^{(l)}=1$, $p_\nu^{(l)} \geqslant 0$. 以矢量 $\underline{\underline{p}}^{(l)} = (p_1^{(l)},\cdots,p_n^{(l)})$ 定义为在时刻 l 的 (概率) 分布矢量. 由时刻 l 到 $l+1$ 的转移方阵定义为

$$T_l = (t_{ij}^{(l)}),\ \sum_{j=1}^n t_{ij}^{(l)} = 1,\ t_{ij}^{(l)} \geqslant 0.$$

其转移关系是 $\underline{\underline{p}}^{(l+1)} = \underline{\underline{p}}^{(l)} T_l$. 如果 $T_l = T$, 不随 l 变化, 则 $\underline{\underline{p}}^{(l)} = \underline{\underline{p}}^{(0)} T^l$. 这一数学结构定义为初始分析为 $\underline{\underline{p}}^{(0)}$, 转移方阵为 T 的 Markov 链, 以 $(\underline{\underline{p}}^{(0)}, T)$ 表之.

在应用 Markov 链时, 有时有确切的 $\underline{\underline{p}}^{(0)}$, 有时仅统计了某一时期的数据, 就得出 $\underline{\underline{p}}^{(0)}$ 及 T, 因而就预测未来, 实际上它也应当检验过去, 即 $\underline{\underline{p}}^{(-l)} = \underline{\underline{p}}^{(0)} T^{-l}$.

我们的基本定理说明了, 除非 $\underline{\underline{p}}^{(0)}$ 是 T 的正特征矢量或 T 的广义置换方阵, 我们一定有一最小的 l_0, 使 $\underline{\underline{p}}^{-(l_0+1)}$ 出现负支量. 这是不可能的. 这说明了 Markov 过程必有开始, 始于 l_0 时刻. 在应用时, 为什么始于这个时刻, 应该有一交代才好.

小结 现在从人民需要或市场价格的角度讲来作一小结. 也许下面所讲的分别是社会主义和资本主义两种制度各自的处理方法.

已往我们为了简便, 讨论了各部门的增长率是一样的情况. 实际上, 各部门的增长率不能是一样的. 有些新产品出现了, 有些旧产品退出历史舞台了, 这是规律. 例如彩色电视机出来后, 黑白电视机滞销了. 因此, 应当根据人民生活的需要来决定各部分的生产量的比例, 也就是我们应当讨论的数学模型是更一般的

$$\lambda_{1\rho}=\frac{y_1^{(1)}}{y_1^{(0)}},\ \lambda_{2\rho}=\frac{y_2^{(1)}}{y_2^{(0)}},\cdots,\ \lambda_{n\rho}=\frac{y_n^{(1)}}{y_n^{(0)}},$$

写成矢量形式

$$\rho\underline{\underline{y}}^{(0)}\Lambda=\underline{\underline{y}}^{(1)},$$

这里 Λ 是以 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为对角线元素的方阵 $[\lambda_1,\cdots,\lambda_n]$. 如前 $\underline{\underline{y}}^{(1)}=\underline{\underline{y}}^{(0)}A^{-1}$, 则得

$$\rho\underline{\underline{y}}^{(0)}=\underline{\underline{y}}^{(0)}A^{-1}\Lambda^{-1},$$

即 $\underline{\underline{y}}^{(0)}$ 是 $A^{-1}\Lambda^{-1}$ 的特征矢量, 而 ρ 是对应的特征根. 因此推广后的问题也就化为原来的问题, 所不同的是用 ΛA 代表了 A, 依然是非负方阵. 由于齐次性, 我们不妨假定

$$\frac{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}{n}=1,$$

这样 ρ 也就唯一了.

假定市场价格矢量是 $\underline{\underline{Q}}=(Q_1,Q_2,\cdots,Q_n)$, 我们用 $\underline{\underline{q}}$ 表示右正特征矢量. 命 V 为对角线方阵

$$V=[q_1/Q_1,\cdots,q_n/Q_n]$$

则 $\underline{\underline{Q}}V=\underline{\underline{q}}$, 由于

$$A\underline{\underline{q}}'=gq',$$

即

$$V^{-1}AV\underline{\underline{Q}}'=g\underline{\underline{Q}}',$$

$\underline{\underline{Q}}$ 是 $V^{-1}AV$ 的右正特征矢量. $V^{-1}AV$ 的最大特征根与 A 相同. 另一方面 $\underline{\underline{x}}_0A^{-1}=g^{-1}\underline{\underline{x}}_0$, 因此得 $\underline{\underline{x}}_0V(V^{-1}AV)^{-1}=g^{-1}x_0V$, 即 $y_0=\underline{\underline{x}}_0V$ 是 $V^{-1}AV$ 的左正特征矢量.

由于市场价格不断在变, 因而分析的周期以短为宜, 如果我们调整得比较快, 则我们越容易跟上市场价格的变化 (当然生产周期有时很长, 并且有些工业的调整不能短期见效, 这是一矛盾). 但先做出软件, 以便随时输入资料, 得出结果, 供决策者参考.

根据目前我国情况, 第一法所用的资料较可靠. 关于世界市场的变化就出了本文的范围了. 但愚见该两法并用, 先保证人民生活提高的一定速度, 再用后法取得世界范围的经济效用.

致谢: 我对彭重民博士表示由衷的感谢. 由于他的渊博的经济学的知识, 给我介绍了国际经济学的流派. 但由于我的能力和时间的限制, 没有能够阅读原作, 因此也就不再引证这些论文了. 我们还该感谢王元、陈德泉、裴定一、徐新红诸同志所给予我的帮助, 特别是裴定一同志, 他自始至终参加了写作过程.

计划经济大范围最优化的数学理论

(VIII) 论 Brouwer 不动点定理

华罗庚

(中国科学院, 北京)

在拓扑学上有一条著名的 Brouwer 不动点定理*:

一个连续映象 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(x)$ 把单位球 $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'\leqslant 1$ 映入其自己, 即 $\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}'\leqslant 1$ 的一部分或全部则一定存在一个不动点, 即有一个 $\boldsymbol{c}$, 使 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{c})$.

这个存在性的定理有广泛的应用, 成为现代经济学派的一个重要工作 (见文献 [1]). 本系列文章中常用的 Perron-Frobinius 定理也可以由这定理推导出来.

命 A 是一非负方阵, 作以下的映象

$$\boldsymbol{y}=\frac{1}{\sigma(\boldsymbol{x}A)}\boldsymbol{x}A, \tag{1}$$

这儿 $\sigma(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}x_i$. 这一映象把

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=1,\quad x_i\geqslant 0(1\leqslant i\leqslant n) \tag{2}$$

映入其自己. (2) 式是一个 $n-1$ 维的单纯形, 这与 $n-1$ 维单位球拓扑等价. 因此 Brouwer 定理可用, 即有一矢量 $\boldsymbol{c}$($\boldsymbol{c}$ 在 (2) 式中) 适合于

$$\boldsymbol{c}=\frac{1}{\sigma(\boldsymbol{c}A})\boldsymbol{c}A. \tag{3}$$

这仍与 Perron-Frobinius 定理有一定的距离, 因为那儿要求的是 $\boldsymbol{c}>0$ 而不仅是 $\boldsymbol{c}\geqslant 0$. 这要求当然超出了 Brouwer 定理所可能得到的结论. 但我们可以利用特殊性立刻证明此点.

如果 $\boldsymbol{c}$ 是 (2) 式的边界点, 我们不妨假定 $\boldsymbol{c}=(0,\cdots,0,c_{r+1},\cdots,c_n)$, $c_{r+1}>0,\cdots,c_n>0$. 代入 (3) 式得

$$\sum_{i=r+1}^{n}c_ia_{ij}=0,\quad 1\leqslant j\leqslant r$$

本文 1984 年 3 月 6 日收到.

* 关于 Brouwer 定理的简洁证明请看 Milnor, J., *Amer. Math. Monthly.*, 85(1978),521–524.

由此得, 对所有适合于

$$r+1 \leqslant i \leqslant n, \quad 1 \leqslant j \leqslant r$$

的 i, j 常有 $a_{ij}=0$, 即 A 是可分拆的. 因此证明了 Rerron-Frobinius 定理.

关于不动点是否唯一, 这性质绝不能由 Brouwer 定理推出来. 因为我们可以举出许多例子表明在 Brouwer 定理的假定下, 可以有多个甚至于有无穷个不动点的情况. 但对我们所考虑的情况, 有以下的结果.

由 (3) 式可知 A 有非负特征根 $\sigma(\boldsymbol{c}A)=g$, 且当 A 不可分拆时有正特征矢量 $\boldsymbol{c}$. 当然 A 还有一右正特征矢量, 即有 $\boldsymbol{d}$ 使

$$A\boldsymbol{d}'=g\boldsymbol{d}'. \tag{4}$$

如果 $g_1(\neq g)$ 也是特征值, 其特征矢量是 $\boldsymbol{c}_1$, 即

$$\boldsymbol{c}_1 A=g_1\boldsymbol{c}_1,$$

考虑

$$g_1\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{d}'=\boldsymbol{c}_1 A\boldsymbol{d}'=g\boldsymbol{c}'\boldsymbol{d}',$$

因而

$$\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{d}'=0. \tag{5}$$

由 $\boldsymbol{d}>0$, 可见 $\boldsymbol{c}_1$ 一定不是正矢量.

留下来的情况是 $g_1=g$, 而 $\boldsymbol{c}\neq\lambda\boldsymbol{c}$ 的情况. 如此, 必然 $\boldsymbol{c}-\alpha\boldsymbol{c}_1$ 也是以 g 为特征值的矢量, 命 α_0 是使

$$\boldsymbol{c}_2=\boldsymbol{c}-\alpha_0\boldsymbol{c}_1\geqslant 0,$$

且出现零支量的最小的正数. 不妨假定

$$\boldsymbol{c}_2=(0,\cdots,0,c_{r+1},\cdots,c_n),\ c_{r+1}>0,\cdots,c_n>0.$$

如此可以推出 A 是可分拆的, 因此证明了唯一性.

以上一些现象的出现, 都是在于 Brouwer 定理的假定太一般了. 更进一步, 在他的假定下还可能出现极限环等现象. 因此我们的基本定理由拓扑学的观点来看是难以得到的. 我们的结果可以说成为, 如果 $\boldsymbol{x}$ 不是不动点, 则一定有一正整数 l 存在使

$$f^l(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}$$

在原区域中无解.

本文所导出的模型是特殊的, 特殊问题用特殊方法处理, 因而可以得出更深入的结果. 因此也说明了在经济学领域内使用 Brouwer 不动点定理的局限性. 因为用了这条定理, 它不仅无法具体算出不动点何在, 而且以上说到的一些现象也无法由此推出.

参 考 文 献

[1] Debreu, G., *Theory of Values–An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1959, 及该书引证的其他文献.

计划经济大范围最优化的数学理论

(IX) 基本定理的证明

华罗庚
(中国科学院, 北京)

基本定理已经在 (III) 中叙述, 但在假定中漏列了 A 非广义置换方阵. 下一节中就立刻论述此点了.

命 $A \geqslant 0$ 表示一 n 行列的方阵 $(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ 其元素 $a_{ij} \geqslant 0$ 者. 如果 $A^{-1} \geqslant 0$, 则 A 称为广义置换方阵.

基本定理 如果 A 是一非广义置换方阵的非负方阵, 不可分拆, 且可逆, 如果 $\boldsymbol{x}$ 是 A 的正特征矢量, 即 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, $x_i > 0$, 则有一正整数 l_0 存在, 当 $l \geqslant l_0$ 时,

$$\boldsymbol{x}A^{-l} = \boldsymbol{x}^{(l)}$$

是一有不同号支量的矢量.

证 1) 假定 A 除去 g 外, 其他特征值的绝对值都小于 g, 则

$$\lim_{l\to\infty} \left(\frac{A}{g}\right)^l$$

是一个秩为一的方阵, 除一个特征根等于 1 外, 其它全是零. 因而

$$\lim_{l\to\infty} \left(\frac{A}{g}\right)^l = \boldsymbol{u}'\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{v}\boldsymbol{u}' = 1,$$

这里 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ 是 n 维矢量, 而 $\boldsymbol{u}'$ 是 $\boldsymbol{u}$ 的置换列矢量, 由于

$$\lim_{l\to\infty} \left(\frac{A}{g}\right)^{l+1} = \frac{A}{g}\boldsymbol{u}'\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}'\boldsymbol{v}\frac{A}{g} = \boldsymbol{u}'\boldsymbol{v},$$

右乘以 $\boldsymbol{u}'$ 及左乘以 $\boldsymbol{v}$ 各得

$$A\boldsymbol{u}' = g\boldsymbol{u}', \quad \boldsymbol{v}A = g\boldsymbol{v}.$$

这里 $\boldsymbol{u} > 0, \boldsymbol{v} > 0$ (参见文献 [1] 第九章第七节).

本文 1983 年 10 月 18 日收到.

如果我们假定 $u_1+\cdots+u_n=1$, 则 $\boldsymbol{u}$ 是唯一决定, 这时 $\boldsymbol{v}$ 亦唯一决定.

不失普遍性, 可以假定 $g=1$. 从 $\boldsymbol{v}\boldsymbol{u}'=1$ 可以推出 $\boldsymbol{x}^{(l)}\boldsymbol{u}'=1$. 假定对所有的 l 常有 $\boldsymbol{x}^{(l)}>0$, 则 $\boldsymbol{x}^{(l)}$ 是一有界集合, 由 Weierstrass-Bolzano 定理存在一个子集合 $l_1<l_2<\cdots$ 使

$$\lim_{i\to\infty}\boldsymbol{x}^{(l_i)}=\boldsymbol{x}^*\geqslant 0.$$

并且有 $\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{u}'=1$. 故

$$\boldsymbol{x}=\lim_{i\to\infty}\boldsymbol{x}A^{-l_i}A^{l_i}=\boldsymbol{x}^*\cdot\boldsymbol{u}'\boldsymbol{v}=v,$$

即得所证.

2)A 如果是不可分拆, 而有特征根 r 的绝对值等于 g 者, 则 (由文献 [1] 第九章第七节) 我们不妨假定

$$A=\begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0\cdots 0 \\ 0 & 0 & A_{23}\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ A_{q_1} & 0 & 0\cdots 0 \end{pmatrix},$$

由于 A 是可逆的, 因此 $n=rq$, 而子行列式全是 $r\times r$ 方阵. 因此

$$A^q=\begin{pmatrix} B_1 & 0\cdots 0 \\ 0 & B_2\cdots 0 \\ 0 & 0\cdots B_q \end{pmatrix},$$

这里 $B_r=A_{r,r+1}A_{r+1,r+2}\cdots A_{r-1,r}$ (注意 $r+i\equiv r_i(\mathrm{mod} q),(1\leqslant r_i\leqslant q)$).

如果 $r=1$, 则 A 就是广义置换方阵. 现在假定 $r>1$. 由 Perron-Frobenius 定理 (文献 [1], 第九章 §2) 有唯一的正矢量 $\boldsymbol{u}$ 使 $\boldsymbol{u}A=g\boldsymbol{u}$. 我们把 $\boldsymbol{u}$ 拆为 q 部分, 每一部分是一 r 维矢量 $\boldsymbol{u}_i$, 即 $\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_q)$, 则得 $\boldsymbol{u}_iA_{i,i+1}=gu_{i+1}$, $1<i\leqslant q$. 故

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u}_2=g^{-1}\boldsymbol{u}_1A_{12},\\ &\boldsymbol{u}_3=g^{-1}\boldsymbol{u}_2A_{23}=g^{-2}u_1A_{12}A_{23},\\ &\cdots\cdots\\ &\boldsymbol{u}_q=g^{-q+1}\boldsymbol{u}_1A_{12}A_{23}\cdots A_{q-1,q} \end{aligned}$$

及

$$g^q\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{u}_1B_1.$$

$\boldsymbol{u}_1$ 是 B_1 的唯一正矢量 (可以差一常数因子), 不然如果 v_1 是另一正特征矢量, 则

其特征根一定是正, 命之为 g_1^q. 定义

$$v_i A_{i,i+1} = g_1 v_{i+1} \quad 1 \leqslant i \leqslant q.$$

则 $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_q)$ 是 A 的另一特征正矢量, 这是不可能的. 因此 B_1 是不可分拆的方阵. B_1 有 g^l 为其特征根, 而且适合 1). 如果 $(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_q) \neq (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_q)$, 则一定有一 i 使 $\boldsymbol{x}_i \neq \boldsymbol{u}_i$, 而 $\boldsymbol{x}_i B_i^{-l}$ 是一变号的矢量 (当 l 充分大时). 定理予以证明.

由于数学家的严密习惯往往会提出以下的问题, 不可分拆的条件可减弱否? 读者不难做出一般性的定理, 而我仅举一简单的例子: 命 $\alpha > 0, \beta > 0. \boldsymbol{x} = (x, 1)$ 及

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha/\beta & 1/\beta \end{pmatrix},$$

则

$$(x,1)A^{-l} = (x,1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{\alpha(1-\beta^l)}{1-\beta} & \beta^l \end{pmatrix}$$

$$= (x - \alpha(1-\beta)^{-1}, 0) + \beta^l(\alpha(1-\beta)^{-1}, 1).$$

当 $\beta > 1$, 则无 x 当 l 充分大时使 $(x,1)A^{-l} > 0$, 即无法可以计划使这经济系统没有危机. 当 $\beta < 1$ 及 $x > \dfrac{\alpha}{1-\beta}$ 时, 则有维数大于 1 的集合, 能使所有的 l 常有 $(x,1)A^{-l} > 0$.

也就是对可分拆的情况可能无稳定状态的情况, 又可能有无穷多个稳定状态的情况. 由此可知, 从数学来判断, 可分拆与不可分拆的结构是不相同的. 混为一谈只能造成混乱. 这是我们为什么先处理不可分拆的情况, 然后再处理一般情况的道理.

参 考 文 献

[1] 华罗庚, 高等数学引论 (余篇), 科学出版社, 1984.

计划经济大范围最优化的数学理论

(X) 生产系统的危机

华罗庚

(中国科学院, 北京)

引　　言

基本定理已经说明了. 一个无消费的生产系统如果生产技术不进步, 这样系统必然导致崩溃, 或被迫不得不大调整. 本文 (Ⅳ) 也讨论过, 用解矩阵方阵方程式的方法一年一年地算出产综的情况.

经济学上往往有以下的概念, 把每年增产的 40% 以下用于最后消费的称为高积累的社会, 超过 60% 的称为高消费的社会. 当一切比例都合乎正特征矢量, 则易于算出社会经济各部门的比例及经济增长率. 但如果初始状态不是如此, 发展的趋势该如何? 由于这个问题的启发, 把基本定理也作了推广, 数学上我们的定理推广了, 但更重要的在于有经济意义的一面.

假定我们每年拿出增产的 α 倍作为最后消费, 第一年余下的产综是

$$\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{x}_1 - \alpha(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0)$$

我们定义 $\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{x}_0$, 及由

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_1 A, \tag{1}$$

知

$$\boldsymbol{y}_1 = (1-\alpha)\boldsymbol{x}_1 + \alpha\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{y}_0((1-\alpha)A^{-1} + \alpha I).$$

因此, 第 l 年可以用来投入第 $(l+1)$ 年生产的产综等于

$$\boldsymbol{y}_l = \boldsymbol{y}_0((1-\alpha)A^{-1} + \alpha I)^l. \tag{2}$$

在进行一般性讨论之前, 先从两个极端说起: (i) 当 $\alpha = 0$ 时, 即前面所讨论过的无消费况, 趋势是必有危机, (ii) 当 $\alpha = 1$ 时, 即把全部都消费掉的情况, $\boldsymbol{y}_l = \boldsymbol{y}_0$, 这是一个 “极端的” 而不发展的社会, 每年多生产出来的都吃尽用光了, 下一年照

本文 1984 年 11 月 22 日收到.

旧样进行. 但当 α 在 0、1 间, 发展的趋势如何呢? 在讨论这问题之前, 先说明以下易知的结果: 命 A 的特征根为,$\lambda_1\cdots,\lambda_n$, 则 $f(A)$ 的特征根是 $f(\lambda_1),\cdots,f(\lambda_n)$, 所对应的特征矢量不变. 可以证明, 如果 A 的正特征矢量是 $\boldsymbol{u}$, 所对应的特征根为 g, 则

$$((1-\alpha)A^{-1}+\alpha I)^l$$

正特征矢量也是 $\boldsymbol{u}$, 所对应的正特征值则是

$$((1-\alpha)g^{-1}+\alpha)^l,$$

还又说明了 PEM 的重要性: 即如果 $\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{u}$(正特征矢量), 则经济依 $(1-\alpha)g^{-1}+\alpha$ 的速度发展. 由于 $(1-\alpha)g^{-1}+\alpha\leqslant g^{-1}$, 这亦符合我们的主观想法, 用多了, 生产的增长速度减慢. 但当 $\boldsymbol{y}_0$ 偏离正特征矢量的情况又如何呢?

我们可以简单地证明, α 越大, 失去平衡的时间越迟. 我们引用以下的

引理 若 $1>\alpha>\beta$, 则由 $\boldsymbol{y}>0$ 及

$$\boldsymbol{y}((1-\beta)A^{-1}+\beta I)>0, \tag{1}$$

必然导致

$$\boldsymbol{y}((1-\alpha)A^{-1}+\alpha I)>0. \tag{2}$$

证 $\dfrac{1-\beta}{1-\alpha}((1-\alpha)A^{-1}+\alpha I)=(1-\beta)A^{-1}+\beta I+\dfrac{\alpha-\beta}{1-\alpha}I,$
因此, 对任一 $\boldsymbol{y}>0$, 如适合 (1) 式必然也适合 (2) 式.

命 $\boldsymbol{y}_\beta^{(l)}$ 是第 l 年减去消费掉增产的 β 倍所余下的产综, 则有

$$\boldsymbol{y}_\beta^{(l)}=\boldsymbol{y}_\beta^{(0)}((1-\beta)A^{-1}+\beta I)^l.$$

由引理得出, 由 $\boldsymbol{y}_\beta^{(i)}>0,\ (i=0,1,\cdots,l)$ 可以推出

$$\boldsymbol{y}_\beta^{(0)}((1-\beta)A^{-1}+\beta I)^{l-1}((1-\alpha)A^{-1}+\alpha I)>0,$$

即

$$\boldsymbol{y}_\beta^{(0)}((1-\alpha)A^{-1}+\alpha I)((1-\beta)A^{-1}+\beta I)^{l-1}>0,$$

因此可得

$$\boldsymbol{y}_\beta^{(0)}((1-\alpha)A^{-1}+\alpha I)^2((1-\beta)A^{-1}+\beta I)^{l-2}>0,$$

等等, 即得 (由 $\boldsymbol{y}_\beta^{(0)}=\boldsymbol{y}_\alpha^{(0)}$)

$$\boldsymbol{y}_\alpha^{(l)}=\boldsymbol{y}_\alpha^{(0)}((1-\alpha)A^{-1}+\alpha I)^l>0,$$

即如果命 l_α 是最小的 l 使 $\boldsymbol{y}_\alpha^{(l)}$ 出现负支量, 则

$$l_\alpha \geqslant l_\beta.$$

已知 $l_1=\infty$, 由此得出一新问题, 由于 $l_\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$ 是 α 的上升函数, 而 $l_1=\infty$ 求最小的 α_0 使 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时, $l_\alpha=\infty$; 而 $\alpha<\alpha_0$ 时, 这一系统必然会导致危机. 要研究这问题, 我们必须把基本定理予以推广.

有正左右特征矢量的方阵

命 B 是一实方阵, 假定 $\boldsymbol{u}$ 是它唯一左正特征矢量, 其对应的特征根 $\lambda>0$, 如果 λ^* 是另一特征根, 而 $\boldsymbol{v}^*$ 是对应的右特征矢量, 则由 $\lambda\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{*\prime}=\boldsymbol{u}B\boldsymbol{v}^{*\prime}=\lambda^*\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{*\prime}$, 由于 λ 不等于 λ^*, 所以 $\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{*\prime}=0$, 因此在右特征矢量中除对应 λ 的一个 $\boldsymbol{u}'$ 特征矢量外, 其他所有特征矢量都不是正矢量. 现在假定这个对应于 λ 的右特征矢量 $\boldsymbol{v}'$ 也是正的. 当然这个特征矢量也是对 λ 的唯一特征矢量 (除掉可能有一个正常数的因子), 这些假定对

$$B=(1-\alpha)A^{-1}+\alpha I$$

都是适合的.

定理 存在一个 l_0 使 $l>l_0$ 时

$$\boldsymbol{x}B^l>0 \tag{1}$$

的必要且充分条件是

$$\lim_{l\to\infty}\boldsymbol{x}\left(\frac{B}{\lambda}\right)^l=\alpha\boldsymbol{u},\ \alpha\neq 0, \tag{2}$$

且适合于 (2) 式的 $\boldsymbol{x}$ 的自由度等于 B 中特征根 λ_i, 适合于 $|\lambda_i|\leqslant\lambda$ 的个数.

全部证明就不叙述了, 这里只准备证明 A 是强非负方阵的情况, 来说明我们的整个思路, 也就是 B 的特征根可以排列成

$$\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_n>0,$$

对每一 λ_i 有一个左特征矢量 $\boldsymbol{u}_i$, 命

$$P=\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{u}_n\end{pmatrix},$$

则

$$PB=[\lambda_1,\cdots,\lambda_n]P.$$

又把 P^{-1} 写成为 $Q=[\boldsymbol{v}'_1,\cdots,\boldsymbol{v}'_n]$, 则

$$BQ=Q[\lambda_1,\cdots,\lambda_n],$$

也就是 $\boldsymbol{v}'_1,\cdots,\boldsymbol{v}'_n$ 是 B 的右特征矢量. 显然有 $\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{v}'_j=\delta_{ij}$. 假定 $\boldsymbol{u}_k>0,\boldsymbol{v}_k>0$.

任一矢量 $\boldsymbol{x}$ 可以写成为

$$\boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{u}_n,$$

则

$$\boldsymbol{x}B^l=\alpha_1\lambda_1^l\boldsymbol{u}_1+\cdots+\alpha_n\lambda_n^l\boldsymbol{u}_n.$$

如果 $\alpha_1\neq0$, 当 l 充分大时, $\alpha_1\lambda_1^l\boldsymbol{u}_1$ 为主项, 因为 $\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}'_k=0$, 所以 u_1 为变号矢量, 也就是当 l 充分大时, $\boldsymbol{x}B^l$ 是一变号矢量, 所以 $\alpha_1=0$, 同理推出 $\alpha_2=\cdots=\alpha_{k-1}=0$. 当

$$\boldsymbol{x}=\alpha_k\boldsymbol{u}_k+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{u}_n$$

时才有可能出现 $x>0$, 当 $\alpha_k\neq0$. 则

$$\lim_{l\to\infty}\boldsymbol{x}\left(\frac{B}{\lambda_k}\right)^l=\alpha_k\boldsymbol{u}_k.$$

如果 $\alpha_k=0$, 则 $\boldsymbol{x}\boldsymbol{v}'=0$, 所以 $\boldsymbol{x}$ 本身就是变号矢量.

应用到 §1 所提出的问题上

上面的定理用到

$$B=(1-\alpha)A^{-1}+\alpha I,$$

现在假定当 $\alpha=0$ 时又重证了本文 (III) 中 A 是原方阵时的基本定理.

如果 A 是原非负方阵, 则 B 的特征根的绝对值的大小次序和 A^{-1} 一样, 所以只有 A 的特征值.

$$g=g_1,g_2,\cdots,g_n,g>|g_2|>\cdots>|g_n|$$

中有几个

$$\left|(1-\alpha)\frac{1}{g_i}+\alpha\right|<(1-\alpha)\frac{1}{g}+\alpha$$

的问题, 即在复平面几上有几个特征根适合于

$$|z|<g, \tag{1}$$

$$\left|(1-\alpha)\frac{1}{z}+\alpha\right| < (1-\alpha)\frac{1}{g}+\alpha. \tag{2}$$

这是两圆 (见图 1),(1) 式代表 g 为半径的圆, (2) 式代表一个圆切于圆 (1)g 的圆, 它经点 $-\tau$ 适合于

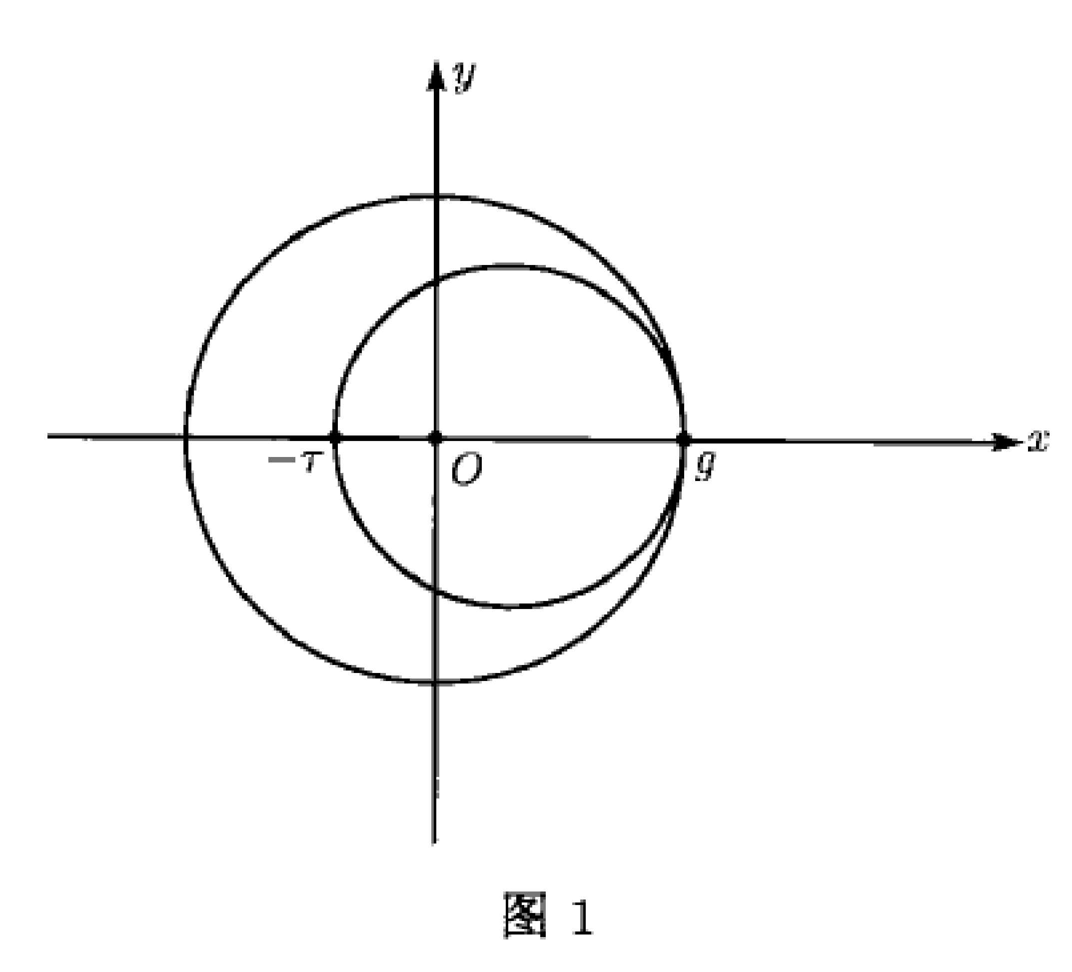


图 1

$$-\frac{1-\alpha}{\tau}-\alpha=(1-\alpha)\frac{1}{g}+\alpha,$$

不难由此求出 τ 来, 当 α 上升时, $xB^l>0$ 的范围越来越大, 其自由度等于圆内月牙形的 g_i 的个数, 逐趋于外围, (当 $\alpha\to 1$) 也就是可能有 $-\alpha_0$ 存在, 在 $\alpha>\alpha_0$ 时可能是 $l_{\alpha_0}\to\infty$ 的时候, 计算 α_0 十分麻烦且无必要, 实际应用只要用下节的方法就可以了.

对 分 法

我们用对分法找出保证八年量综不出现负号的方法. 其原理是 l_α 是递增函数 (如我们在 §1 中所证).

如果 xA^{-8} 是正号, 虽然增长速度小些, 这个计划基本可行.

如果 xA^{-8} 出现负号, 就必须修改计划, 修改计划的方法见本文 (V).

假如八年量综不出现负号, 就可以考虑增加消费的问题了, 试用 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时的情况来定, 当

(i) 如果八年不出现负号, 说明可以拿生产量综的一多半来做最终消费量综. 可试用 $\boldsymbol{\alpha}=\frac{3}{4}$ 等等, 看是不是可以再多消费些.

(ii) 如果八年出现负号, 说明可以拿生产量综的一少半来做最终消费量综不行. 可试用 $\boldsymbol{\alpha}=\frac{1}{4}$ 等等. 如 α 不能小于 $\frac{1}{4}$, 则计划必须改变 (调整), 这就是优选法中常

用的对分法.

当然还有 α 先给定的, 我们可以算一下能够保持八年不出负量综, 小于八年就要调整计划. 每年做计划时都不断小调整, 保证八年不出负量综, 这样不断延续下去, 就不会产生危机.

为什么提保证八年呢? 因为 $8=2^3$, 这样就很容易使用对分法来找八年量综不出负号的方法.

当然还是尽可能调整使产综符合 PEV, 这样不但远望是平衡, 而且近瞻是高速度, 如果以 PEV 开始, 一年后再小修改到 PEV. 绝不为某一产品的生产能力没有达到而可惜.

调整方法见本文 (V)、(VI), 这就不必多说了.

下面是徐新红同志按 (I)§5 例子计算的情况:

$$A=\frac{1}{100}\begin{pmatrix}25 & 14\\ 40 & 12\end{pmatrix}, A^{-1}=\frac{5}{13}\begin{pmatrix}-12 & 14\\ 40 & -25\end{pmatrix},$$

$$1/g=5/26(\sqrt{2409}-37)=2.32337784.$$

现取初始产综为 $x^{(0)}=(45,20)$ 列表如下:

$\alpha(\%)$	l_α(年)	$(1-\alpha)1/g+\alpha$
0	2	2.32337784
10	2	2.191040056
20	2	2.058702272
30	2	1.926364488
40	3	1.794026704
50	3	1.66168892
60	3	1.529351136
70	4	1.397013352
80	7	1.264675568
85	13	1.198506676
87.5	191	1.16542223
$\frac{185}{211}\times 100$		1.163070255
90		1.132337784
100		1

关于经济优化平衡的数学理论

引　言

在社会主义市场经济的体制下, 政府对经济的宏观调控及如何制订计划使各主要经济部门协调发展仍是非常重要的. 例如, 如果不注意电力的供应能力而建设了一批工厂, 就会由于电力供应不足而影响生产, 与其让若干工厂轮流停电, 何不缓建一些工厂而投资于电力的建设. 反之, 如果电力多了, 又没有储电的有效办法, 就造成了浪费. 进而言之, 电力开发也是需要其他工业产品的; 建电站要钢材, 水泥, 发电机, 电缆等. 建火电站, 则还要煤及运输煤的手段等. 总之, 工业生产是一环紧扣一环的. 当然处处都需要用人, 而人要吃、穿、用, 还要文化娱乐. 因此, 要处理这样一个把所有生产消费环节都考虑进去的大系统, 制订协调发展的计划, 即使数学方法再进步些, 电脑再先进些, 也是做不到的. 还要靠市场的调节功能来进行调节. 但给出将主要经济环节包括进去的经济平衡系统, 并给出某种优化方案, 还是有可能的, 也是重要的. 本章即讨论这方面的问题. 我们先讲这一工作所需的数学工具, 即非负矩阵理论. 这一理论是由 G. Frobenius 与 O.Perron 建立的. 然后讲它在经济优化平衡理论问题上的应用. 当然必需指出, 本章所讲的理论并未经过实践的检验, 还是一项正在探索中的工作.

非负矩阵的相似性

若矩阵 A 的元素都是非负的, 就称为非负矩阵, 以 $A \geqslant 0$ 表之, $A > 0$ 则表示 A 的元素都是正的. 进一步引申, 用 $A \geqslant B$ 表示 $A - B \geqslant 0$ 及 $A > B$ 表示 $A - B > 0$.

若一方阵 Q, 其中每行每列均只有一个正元素, 其他元素都是零, 则称 Q 为广义换位方阵. 普通的换位方阵 P 的定义为 P 的每行每列均只有一个元素为 1, 其他元素都是 0. 例如对角方阵 $\Lambda = [\lambda_1, \cdots, \lambda_n](\lambda_i > 0)$ 是广义换位方阵. 易知任何广义换位方阵皆可以唯一地表成 ΛP.

命 A, B 为两个非负方阵. 若有广义非负方阵 Q 使

$$QAQ^{-1} = B.$$

则称 A 与 B 相似, 记为 $A \sim B$.

相似关系有以下性质: (i)$A \sim A$,(ii) 若 $A \sim B$, 则 $B \sim A$, (iii) 若 $A \sim B, B \sim C$, 则 $A \sim C$. 根据这些性质, 相似关系可以将非负矩阵分成等价类, 每类中任二方阵均相似, 不同类的方阵不相似. 又可知 (iv) 若 $A \sim B, A \geqslant 0$(或 $A > 0$), 则 $B \geqslant 0$(或 $B > 0$).

若方阵 A 相似于

$$B = \begin{pmatrix} B_1^{(k)} & 0 \\ B_2^{(n-k,k)} & B_3^{(n-k)} \end{pmatrix},$$

其中 $B_1^{(k)}$ 表示 $k \times k$ 方阵, $B_2^{(n-k,k)}$ 表示 $(n-k) \times k$ 矩阵等, 则称 A 为可分拆方阵, 否则称为不可分拆方阵. 若 A 可分拆, 则由于

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & B_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_3 & 0 \\ B_2 & B_1 \end{pmatrix},$$

其中 I 表示恒等方阵, 所以一个不可分拆方阵的转置也是不可分拆的.

标 准 型

若一个不可分拆的非负方阵 $A = (a_{ij})(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ 适合于

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = q, \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

则称 A 为标准型, 其中 q 称为 A 的高标.

定理 8.1 (Frobenius-Perron) 任何不可分拆的非负方阵 A 一定相似于一个标准型. 若不计重排, 则标准型是唯一的.

证 不妨假定

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = q_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

及 $q_1 = \cdots = q_s > q_s + 1 \geqslant \cdots \geqslant q_n$, 否则可以经列的重排使之满足这一关系. 记

$$Q(A) = \max_i q_i = q_1.$$

我们首先往证可以选取对角方阵 Λ 使 $\Lambda A \Lambda^{-1}$ 中列和等于 q_1 之列数少于 s, 其他列和均小于 q_1. 记

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}.$$

此处 $A_1 = A_1^{(s)}$ 等. 取

$$\Lambda = [I^{(s)}, \Lambda_1], \quad \Lambda_1 = [\lambda_{s+1}, \cdots, \lambda_n].$$

则

$$\Lambda A \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \Lambda_1^{-1} \\ \Lambda_1 A_3 & \Lambda_1 A_4 \Lambda_1^{-1} \end{pmatrix}.$$

由于 $A_3 \neq 0$, 所以可以取 Λ_1 使

$$\Lambda_1 A_3 \leqslant A_3, \quad \Lambda_1 A_3 \neq A_3. \tag{1}$$

同时使 $\Lambda A \Lambda^{-1}$ 的后面 $n-s$ 列的列和仍然小于 q_1. 由 (1) 可知 $\Lambda A \Lambda^{-1}$ 的前 s 列中至少有一列之和小于 q_1. 因此 $\Lambda A \Lambda^{-1}$ 的列和等于 q_1 的列数少于 s, 其他列和则小于 q_1. 继续这一步骤可使方阵的所有列和均小于 q_1, 即存在 Λ 使

$$Q(\Lambda A \Lambda^{-1}) < Q(A). \tag{2}$$

其次, 考虑满足下面条件的对角方阵集合

$$S = \{\Lambda = [\lambda_1, \cdots, \lambda_n]; \lambda_i > 0 (1 \leqslant i \leqslant n), \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1\}.$$

由于

$$\Lambda A \Lambda^{-1} = \left(\frac{1}{\lambda}\Lambda\right) A \left(\frac{1}{\lambda}\Lambda\right)^{-1} \quad (\lambda > 0).$$

所以我们实质上已经考虑了所有的非负对角方阵 Λ. 命 q 为 $Q(\Lambda A \Lambda^{-1})(\Lambda \in S)$ 的下确界. 若有 Λ 使

$$Q(\Lambda A \Lambda^{-1}) = q, \quad \Lambda \in S.$$

则由 (2) 可知 $\Lambda A \Lambda^{-1}$ 的各列之和都等于 q, 即 A 相似于一个标准型. 否则, 在 S 中有方阵贯

$$\Lambda_i = [\lambda_1^{(i)}, \cdots, \lambda_n^{(i)}], \quad i = 1, 2, \cdots$$

使

$$Q(\Lambda_i A \Lambda_i^{-1}) < q + \frac{1}{i}. \tag{3}$$

由于 S 是一个闭单纯形, 所以 $\Lambda_i (i = 1, 2, \cdots)$ 有一个极限点 $\Lambda_0 = [\lambda_1^{(0)}, \cdots, \lambda_n^{(0)}]$, 即在 $\Lambda_i (i = 1, 2, \cdots)$ 中可以选出一个子贯收敛于 Λ_0. 不妨假定

$$\lim_{i \to \infty} \Lambda_i = \Lambda_0.$$

由 $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{(0)} = 1$ 即可知不能所有 $\lambda_j^{(0)} = 0$. 不妨假定 $\lambda_i^{(0)} \neq 0 (1 \leqslant i \leqslant s), \lambda_j^{(0)} = 0 (s+1 \leqslant j \leqslant n)$. 由

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{(i)} a_{jk} \lambda_k^{(i)-1} < q + \frac{1}{i}, \quad 1 \leqslant j \leqslant s, i = 1, 2, \cdots$$

可知

$$a_{jk}=0,\quad 1\leqslant j\leqslant s,\quad s+1\leqslant k\leqslant n,$$

即 A 是一个可分拆方阵, 矛盾, 所以 $s=n$. 命 $i\to\infty$. 则由 (3) 可知

$$\lambda_k^{(0)-1}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{(0)}a_{jk}\leqslant q,\quad 1\leqslant j\leqslant n.$$

即得

$$Q(\Lambda_0 A\Lambda_0^{-1})=q.$$

最后, 我们往证标准型是唯一的. 假定 A 与 $\Lambda A\Lambda^{-1}$ 都是标准型, 其列和分别是 q 与 q'. 则

$$\lambda_1 a_{1i}+\cdots+\lambda_n a_{ni}=q'\lambda_i,\quad 1\leqslant i\leqslant n. \tag{4}$$

即得

$$q\min(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\leqslant q'\lambda_i\leqslant q\max(\lambda_1,\cdots,\lambda_n),\quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

分别取 $\lambda_i=\min(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 与 $\max(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$, 即得 $q=q'$. 代入 (4) 得

$$\lambda_1 a_{1i}+\cdots+\lambda_n a_{ni}=(a_{1i}+\cdots+a_{ni})\lambda_i,\quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

如果经过重排有 $\lambda_1\leqslant\cdots\leqslant\lambda_s<\lambda_{s+1}=\cdots=\lambda_n$, 则以 $i=1,\cdots,s$ 代入上式即可知

$$a_{ji}=0,\quad 1\leqslant i\leqslant s,\quad s+1\leqslant j\leqslant n.$$

这与 A 是不可分拆的假定相矛盾. 所以标准型唯一. 定理证完.

附记: 由定理的证明可见在相似关系中, 只用到对角方阵.

特 征 矢 量

定理 8.2 假定 A 是不可分拆的非负方阵. 则存在一个正特征矢量以其高标 q 为其对应的特征根. A 的其他特征根的绝对值都不超过 q.

证 不妨假定 A 为标准型. 则 $\vec{e}=(1,\cdots,1)$ 即为 A 的正特征矢量:

$$\vec{e}A=q\vec{e}.$$

假定 q' 为另一特征根, 其对应的特征矢量为 $\vec{x}=(x_1,\cdots,x_n)$. 于是

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_i=q'x_j.$$

则

$$|q'||x_j| \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_{ij}|x_i| \leqslant q \ \max_i |x_i|.$$

取 $|x_j| = \max_i |x_i|$, 即得定理.

定理 8.3 一个不可分拆的非负方阵 A, 若不计常数因子, 必有且仅有一个非负行 (或列) 特征矢量, 且它是正矢量. 反之, 若一个非负方阵 A 仅有一个非负行 (或列) 特征矢量, 且为正矢量, 则 A 是不可分拆的.

证 首先注意在标准型的定义中, 我们可以用行积来代替列和. 则由定理 8.2 可知若 A 为标准型, 则 $\vec{e}^T$ 为 A 的列特征矢量, 其特征根为 q.

其次, 若 $\vec{x}^T$ 是 A 的列特征矢量, 其对应的特征根为 β; $\vec{y}$ 是 A 的行特征矢量, 其对应的特征根为 γ. 若 $\beta \neq \gamma$, 则必 $\vec{y}\vec{x}^T = 0$. 事实上, 由

$$A\vec{x}^T = \beta\vec{x}^T \text{与} \vec{y}A = \gamma\vec{y}$$

即得

$$\gamma\vec{y}\vec{x}^T = \vec{y}A\vec{x}^T = \beta\vec{y}\vec{x}^T,$$

$$(\gamma - \beta)\vec{y}\vec{x}^T = 0.$$

所以

$$y\vec{x}^T = 0.$$

任何不可分拆的非负方阵 A, 一定有一个正特征列矢量 $\vec{u}^T$, 其特征根为 q. 若 $\vec{v}$ 为 A 的行特征矢量, 其特征根不等于 q, 则 $\vec{v}\vec{u}^T = 0$. 由于 $\vec{u} > 0$. 所以 $\vec{v}(\neq \vec{o})$ 不可能是非负的.

A 的任何非负特征矢量一定是正矢量. 否则若有零支量, 则可推出 A 是可分拆的了. 又若 A 有两个正特征矢量 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$, 其特征根都是 q, 则

$$(\vec{v}_1 - \lambda\vec{v}_2)A = q(\vec{v}_1 - \lambda\vec{v}_2).$$

取 λ 使 $\vec{v}_1 - \lambda\vec{v}_2 \geqslant 0$ 且有零支量. 这与 A 不可分拆相矛盾, 所以正特征矢量的唯一性得证, 反之, 若 A 可分拆, 则一定有一个有零支量的非负特征矢量. 定理证完.

定理 8.4 命 $C = (c_{ij})$ 为一个复元素方阵. 若 $|c_{ij}| \leqslant a_{ij}$, 其中 $A = (a_{ij})$ 为一个高标为 q 的不可分拆方阵, 则 C 的任一特征根 r 的绝对值均不超过 q. 又若 C 有一个特征根 $r = qe^{i\theta}$, 则

$$C = e^{i\theta}[e^{-i\theta_1}, \cdots, e^{-i\theta_n}]A[e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}].$$

证 不妨假定 A 为标准型. 命 $(x_1, \cdots, x_n)$ 是 r 对应的特征矢量. 则

$$rx_j = \sum_{i=1}^{n} x_i c_{ij}.$$

由假设可知

$$|r||x_j| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i||c_{ij}| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| a_{ij} \leqslant \max_i |x_i| q. \tag{5}$$

取 $|x_j| = \max_i |x_i|$, 即得 $|r| \leqslant q$.

其次, 若 $r = qe^{i\theta}$, 我们不妨假定

$$|x_1| = \cdots = |x_s| > |x_{s+1}| \geqslant \cdots \geqslant |x_n|.$$

当 $1 \leqslant j \leqslant s$ 时, 由 (5) 可知 $a_{ij} = 0, s+1 \leqslant i \leqslant n$, 即 A 是可分拆的, 矛盾, 所以必须

$$|x_1| = \cdots = |x_n|.$$

不妨假定 $|x_j| = 1$, 命 $x_j = e^{i\theta_j}$. 则得

$$(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n})C = qe^{i\theta}(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}),$$

即

$$\sum_{k=1}^{n} e^{i\theta_k} c_{kj} = qe^{i(\theta+\theta_j)}.$$

又由 (5) 的两端可知 $|c_{kj}| = a_{kj}$. 由于 A 是标准型, 所以

$$\sum_{k=1}^{n} |c_{kj}| = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} = q = e^{-i\theta} \sum_{k=1}^{n} e^{-i(\theta_j - \theta_k)} c_{kj},$$

即

$$a_{kj} = e^{-i(\theta_j - \theta_k)} c_{kj} e^{-i\theta}.$$

定理证完.

定理 8.5 假定 A 是不可分拆的非负方阵. 若 A 有一个以上的特征根的绝对值等于其高标 q, 则这些特征根就是

$$qe^{2\pi il/k}, \quad l = 0, 1, \cdots, k-1,$$

其中 $k \geqslant 2$.

证 假定 A 有一个特征根 $qe^{i\theta}$. 则由定理 4 可知

$$A = e^{i\theta}[e^{-i\theta_1}, \cdots, e^{-i\theta_n}]A[e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}].$$

其特征方程是

$$f(\lambda) = |A - \lambda I| = |e^{i\theta} A - \lambda I| = 0,$$

即如果 λ 是一个特征根, 则 $\lambda e^{i\theta}, \lambda e^{2i\theta}, \cdots$ 都是特征根. 由于 $f(\lambda) = 0$ 的根数有限, 所以有一个最小的 k 使 $k\theta$ 为 2π 的倍数, 其中 $k \leqslant 2$. 定理证完.

定理 8.6 命 A 为一个不可分拆的非负方阵. 则其高标不是 A 的特征方程的重根.

证 A 的特征多项式 $f(\lambda) = |A - \lambda I|$ 的微商等于

$$f'(\lambda) = \begin{vmatrix} 1, & 0, & \cdots, & 0 \\ -a_{21}, & \lambda - a_{22}, & \cdots, & -a_{2n} \\ & \cdots & & \\ -a_{n1}, & -a_{n2}, & \cdots, & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots,$$

其中第一个行列式是主子阵

$$A_1 = (a_{ij}), \quad 2 \leqslant i, j \leqslant n$$

的特征多项式. 由于 A 不可分拆, 所以 A_1 的高标小于 q. 即当 $\lambda \geqslant q$ 时, 其数为正. 其他各项亦然, 所以当 $\lambda \geqslant q$ 时有 $f'(\lambda) > 0$. 这说明 q 是 $f(\lambda) = 0$ 的单根. 定理证完.

强不可分拆方阵

若一方阵 A 的任意幂都不可分拆, 则称 A 为强不可分拆的.

如果 A 是强不可分拆的非负方阵, 则 A 的绝对值等于 q 的特征根只有 q 一个, 否则由定理 8.5 即可知 A^k 有重根. 又由定理 8.6 可知 A^k 是可分拆的, 这与 A 是强不可分拆的假定相违背.

定理 8.7 假定 A 是高标为 q 的强不可分拆非负方阵, 则

$$\lim_{l \to \infty} \left(\frac{A}{q}\right)^l = \vec{u}^T \vec{v}, \quad \vec{v}\vec{u}^T = 1,$$

此处 $\vec{u}^T$ 与 $\vec{v}$ 分别为 A 的正列与正行特征矢量.

证 由于除 q 以外, A 的特征根的绝对值均小于 q, 所以

$$\lim_{l \to \infty} \left(\frac{A}{q}\right)^l = A_0,$$

其中 A_0 只有一个特征根为 1, 其他都是零, 因此 A_0 可以表示为

$$A_0 = \vec{u}^T \vec{v}, \quad \vec{v}\vec{u}^T = 1.$$

命 $\vec{c}$ 为 A 的任一非零特征矢量. 定义

$$\vec{v}_l = \vec{c}\left(\frac{A}{q}\right)^l.$$

则

$$\lim_{l\to\infty} \vec{v}_l = \vec{c}\vec{u}^T\vec{v} = (\vec{c}\vec{u}^T)\vec{v}$$

是 $\vec{v}$ 的常数倍. 因此

$$q\vec{v}_{l+1} = q\vec{c}\left(\frac{A}{q}\right)^{l+1} = \vec{c}\left(\frac{A}{q}\right)^l A = \vec{v}_l A.$$

命 $l\to\infty$, 即可知 $\vec{v}$ 是 A 对于 q 的正特征行矢量. 同样可证 $\vec{u}^T$ 是 A 的正特征列矢量. 定理证完.

由定理的证明可见, 若 A 是强不可分拆的非负方阵, 则存在 l 使 $A^l > 0$. 反之, 若 $A^l > 0$, 则显然 A 是强不可分拆的.

定理 8.8 假定 A 是强不可分拆的非负方阵, 且可逆. 若 $\vec{x}$ 非 A 的正特征行矢量, 则一定存在正整数 l_0, 当 $l \geqslant l_0$ 时

$$\vec{x}A^{-l} = \vec{x}^{(l)}$$

为有不同号支量的矢量.

证 由定理 8.7 可知

$$\lim_{l\to\infty}\left(\frac{A}{q}\right)^l = \vec{u}^T\vec{v}, \quad \vec{v}\vec{u}^T = 1$$

及

$$A\vec{u}^T = q\vec{u}^T, \quad \vec{v}A = q\vec{v}, \quad \vec{u} > 0, \vec{v} > 0.$$

不妨假定 $\vec{u}$ 与 $\vec{v}$ 的支量之和均为 1. 这样 $\vec{u}$ 与 $\vec{v}$ 就唯一确定了. 我们不妨假定 $q = 1$, 否则以 q 除 a_{ij} 代替 a_{ij} 即可. 还可假定 $\vec{x}\vec{u}^T = 1$. 所以

$$\vec{x}^{(l)}\vec{u}^T = \vec{x}A^{-l}\vec{u}^T = \vec{x}\vec{u}^T = 1.$$

现在假定对所有 l 都有

$$\vec{x}^{(l)} \geqslant 0.$$

则由 $\vec{x}^{(l)}\vec{u}^T = 1$ 可知 $\vec{x}^{(l)}$ 构成一个有界闭集. $\vec{x}^{(l)}(l = 1, 2, \cdots)$ 至少有一个极限点. 不妨假定

$$\lim_{l\to\infty} \vec{x}^{(l)} = \vec{x}^*.$$

由 $\vec{x}^*\vec{u}^T=1$ 可得

$$\vec{x}=\lim_{l\to\infty}\vec{x}A^{-l}A^l=\vec{x}^*\lim_{l\to\infty}A^l=x^*\vec{u}^T\vec{v}=\vec{v},$$

即 $\vec{x}$ 是 A 的正特征矢量, 定理证完.

产综与消耗系数方阵

社会的经济结构是很复杂的. 社会的总生产可分为两大部类: 第一部类是生产资料的生产, 第二部类是消费资料的生产. 为简单计, 我们暂时先研究第一部类. 假定将组成社会生产的 n 种重要产品加以综合研究. 我们不妨将这 n 种产品编号为 $1,2,\cdots,n$, 其中第 i 种产品的计量单位以 p_i 表示, 例如钢的单位为吨, 电的单位为千瓦小时, 如果第 i 种产品的数量为 x_i, 则产品的整体可以用矢量

$$\vec{x}=(x_1,\cdots,x_n)$$

表示. 这一矢量称为产综. 注意: 在此并没有用统一的度量, 即用货币来作为所有产品的共同度量.

假定时间有一个单位, 例如"年". 若开始生产时的产综为

$$\vec{x}^{(0)}=(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)}),$$

命 $\vec{x}^{(j)}=(x_1^{(j)},\cdots,x_n^{(j)})$ 表示第 j 年的产综, 则整个生产发展的变化就是产综的变化:

$$\vec{x}^{(0)}\longrightarrow\vec{x}^{(1)}\longrightarrow\cdots\longrightarrow\vec{x}^{(j)}\longrightarrow\cdots.$$

所以研究生产发展的规律就是研究产综的变化.

假定第一年度将第 j 类产品分配给第 i 类产品用于再生产或其他目的数量为 $x_{ij}^{(0)}$, 则

$$x_j^{(0)}=\sum_{i=1}^n x_{ij}^{(0)}.\quad 1\leqslant j\leqslant n.$$

命

$$\vec{x}^{(0)}(i)=(x_{i1}^{(0)},\cdots,x_{in}^{(0)}),\quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

这是分配给第 i 类产品的产综. 所以

$$\vec{x}^{(0)}=\sum_{i=1}^n\vec{x}^{(0)}(i)$$

就是开始生产时的产综. 一年后的产综是 $\vec{x}^{(1)} = (x_1^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)})$, 命

$$a_{ij}^{(0)} = x_{ij}^{(0)}/x_i^{(1)}.$$

这表示生产 p_i 单位第 i 类产品要消耗 j 类产品量, 其计量单位为 p_j/p_i. 所以

$$x_j^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(0)} x_i^{(1)}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

将这个式写成矩阵形式

$$\vec{x}^{(0)} = \vec{x}^{(1)} A \tag{6}$$

或

$$\vec{x}^{(1)} = \vec{x}^{(0)} A^{-1},$$

此处

$$A = (a_{ij}^{(0)}), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

A 称为第一年度的消耗系数矩阵.

显然可以假定 A 是不可分拆的非负方阵, 否则若 A 相似于

$$\begin{pmatrix} A_1^{(k)} & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}, \quad 1 \leqslant k < n$$

则我们考虑的经济系统中, 第 $k+1, \cdots, n$ 类产品的生产与第 $1, \cdots, k$ 类产品无关. 这种情况可分成小系统分别研究. 所以我们可以假定 A 不可分拆.

第二部类产品的数学模型

第二部类生产是指消费资料的生产. 在数学模型中, 可以把行政开支, 国防费用, 教育文化, 进出口贸易等也包括在内来处理.

以 $\vec{\xi}^{(l)} = (\xi_1^{(l)}, \cdots, \zeta_n^{(l)})$ 代表第 l 年政府开支, 教育文化, 投资折旧等的总和产综. 则用下面的模型来表示:

$$\vec{x}^{(l)} - \vec{\xi}^{(l)} = \vec{x}^{(l+1)} A. \tag{7}$$

左边表示 l 年的产综 $\vec{x}^{(l)}$ 减去支出产综 $\vec{\xi}^{(l)}$, 即 l 年实际可以投入生产的产综.

$\vec{\xi}^{(l)}$ 是由政府决定的. 假定 $\vec{\beta}^{(0)}$ 是一个初始矢量, 可以暂时不确定. 由递推公式

$$\vec{\xi}^{(l)} = \vec{\beta}^{(l+1)} A - \vec{\beta}^{(l)}, \quad l = 0, 1, 2, \cdots$$

来确定 $\vec{\beta}^{(l)}$. 代入 (7) 即得

$$\vec{x}^{(l)}+\vec{\beta}^{(l)}=(\vec{x}^{(l+1)}+\vec{\beta}^{(l+1)})A.$$

这就与模型 (6) 相一致了. 所以考虑模型 (6) 并未失去一般性.

由 (6) 可知

$$\vec{x}^{(1)}-\vec{x}^{(0)}=\vec{x}^{(1)}(I-A)$$

或

$$\vec{x}^{(1)}=(\vec{x}^{(1)}-\vec{x}^{(0)})(I-A)^{-1}.$$

这就是著名的 W. Leontief 模型.

正特征矢量法

命 q 为 A 的最大正特征根. 则由定理 8.3 可知对应于 q 有唯一的正行特征矢量 $\vec{u}$:

$$\vec{u}A=q\vec{u}.$$

由 (6) 出发, 如果初始产综 $\vec{x}^{(0)}$ 取作 $\vec{u}$(或其某一倍数), 则得

$$\vec{x}^{(0)}=\vec{x}^{(1)}A=q\vec{x}^{(1)}.$$

注意: $\vec{x}^{(1)}$ 应为 $\vec{x}^{(0)}$ 之倍数. 所以

$$\vec{x}^{(1)}=q^{-1}\vec{x}^{(0)}.$$

用归纳法可以证明

$$\vec{x}^{(l)}=q^{-l}\vec{x}^{(0)},\quad l=1,2,\cdots.$$

这就是说, 如果投入生产的产综各分量之比与消耗系数方阵 A 的正特征矢量 $\vec{u}$ 的各分量之比一样, 则各部门的产量将按 $1/q$ 的倍数增长, 这是最高的增长速度. 如果考虑到第二部类生产. 则由 (7) 可知, 应选取 $\vec{\xi}^{(l)}$ 使 $\vec{x}^{(l+1)}$ 尽可能与正特征矢量成比例.

如果初始产综 $\vec{x}^{(0)}$ 与正特征矢量 $\vec{u}$ 不成比例, 则由定理 8.8 可知经过一段时间, 例如 l 年, $\vec{x}^{(l)}$ 就有负支量, 这是不允许的, 也就是说出现了危机, 需要对投入比进行调整.

例 假定 $n=2$ 及消耗系数方阵为

$$A=\frac{1}{100}\begin{pmatrix}25 & 14\\ 40 & 12\end{pmatrix},$$

则 A 的正特征矢量为

$$\vec{u}=\left(\frac{5}{7}(\sqrt{2409}+13),20\right)=(44.34397483\cdots,20).$$

取两个生产部门, 其编号用 1,2 表示. 如果取初始产综 $\vec{x}^{(0)}=(45,20)$, 则得下表

表 1

时间 \ 部门编号	1	2	生产增长倍数 1	生产增长倍数 2
原来	45	20	—	—
第一年	100	50	2.2	2.5
第二年	300.7	57.7	3.08	1.15
第三年	−532.5	1102.1	出现负值, 生产无法继续	

其中 $\vec{x}^{(3)}=(-532.5,1102.1)$ 中出现负值, 表示生产部门 1 的原料已经消耗完, 无法进行再生产了, 所以最晚在第二年就应该对投入进行调整. 同样如果取 $\vec{u}$ 的三位小数近似作为 $\vec{x}^{(0)}$, 即

$$\vec{x}^{(0)}=(44.344,20),$$

则第 8 年的产综 $\vec{x}^{(8)}=(8.9821,-23.501)$ 中有负值. 如果取 $\vec{u}$ 的八倍小数近似作为 $\vec{x}^{(0)}$, 即

$$\vec{x}^{(0)}=(44.34397483,20),$$

则第 13 年的产综 $\vec{x}^{(13)}=(12,371,364.61,-6,472,534.43)$ 中有负值.

从理论上讲, 正特征矢量只是 n 维欧氏空间第一象限中的一条射线 t, 其测度为零, 而产综稍稍偏离 t 就会产生不平衡, 所以平衡是暂短的, 而不平衡则是经常的. 因此需要不断进行调整, 使产综尽量靠近 t.

线性规划的应用

在模型 (6) 与 (7) 中都没有考虑到生产能力的限制问题, 即 $\vec{x}^{(1)}=\vec{x}^{(0)}A^{-1}$ 的一些分量超过了现有生产能力上限的问题. 这个问题可以用线性规划方法来加以解决.

假定 $\vec{\eta}=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$ 表示生产能力的上限, 即下一年度中最多能生产 i 类产品 η_i 个 p_i 单位. 则本年度应投入多少产品呢? 也就是要求矢量 $\vec{x}$ 使

$$\vec{x}^{(1)}=\vec{x}A^{-1}\leqslant\vec{\eta}$$

其中 $\vec{x}$ 当然还要满足约束条件

$$0\leqslant\vec{x}\leqslant\vec{x}^{(0)}.$$

假定第 i 类产品 p_i 单位的价值或利润是 q_i 及 $\vec{q}=(q_1,\cdots,q_n)$, 此处我们可以用统一的货币单位, 例如人民币. 于是得到线性规划模型

$$\begin{cases} \max \vec{x}\ A^{-1}q', \\ 0 \leqslant \vec{x} \leqslant \vec{x}^{(0)}, \\ 0 \leqslant \vec{x}A^{-1} \leqslant \vec{\eta}, \end{cases}$$

即在约束条件 $0 \leqslant \vec{x} \leqslant \vec{x}^{(0)}$, $0 \leqslant \vec{x}A^{-1} \leqslant \vec{\eta}$ 之下, 求 $\vec{x}$ 使目标函数 $\vec{x}A^{-1}q'$, 即总利润或产值达到最优. 以这一 $\vec{x}$ 作为投入产综最好.

这一问题可以用单纯形方法来求解.

计　算

假定 $A>0$ 及 A 的高标 $q<1$.

1)Leontief 逆矩阵 $(I-A)^{-1}$ 的计算. 命

$$\mathcal{O}_m = \sum_{v=0}^{m-1} A^v, \quad m=1,2,\cdots.$$

则

$$\lim_{m\to\infty} \mathcal{O}_m = (I-A)^{-1}.$$

这一方法的收敛速度很慢, 建议先逐次算出

$$A^2, (A^2)^2 = A^4, \cdots, A^{2^{k-1}}, \cdots, \tag{8}$$

再用递推公式

$$\mathcal{O}_{2^k} = \mathcal{O}_{2^{k-1}} + A^{2^{k-1}}\mathcal{O}_{2^{k-1}}, \quad k=1,2,\cdots.$$

即可得出 $\mathcal{O}_{2^k}$. 用上面两个方法算出 $\mathcal{O}_{2^k}$ 所需的矩阵乘法次数分别为

$$O(2^k) \quad 与 \quad O(k).$$

2) 高标的计算. 由于 A 是强不可分拆方阵, 所以 A 的绝对值等于 q 的特征根只有 q 一个. 特征根满足的方程为 $|\lambda I - A| = 0$. 由根与系数的关系可知 A 的特征根之和等于 A 的迹:

$$S(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

应用下面的事实: 若 $0 \leqslant |a_k| < a (2 \leqslant k \leqslant n)$, 则

$$\lim_{m\to\infty} (a^m + \sum_{k=2}^{n} a_k^m)^{\frac{1}{m}} = a. \tag{9}$$

这一事实可以证明如下：显然

$$a^m+\sum_{k=2}^{n}|a_k^m|\leqslant na^m,$$

及当 m 充分大时

$$a^m-\sum_{k=2}^{n}|a_k^m|=a^m\left(1-\left(\frac{a_2}{a}\right)^m-\cdots-\left(\frac{a_n}{a}\right)^m\right)>\frac{a^m}{2},$$

所以

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{m}}a &\leqslant(a^m-\sum_{k=2}^{m}|a_k^m|)^{\frac{1}{m}}\\ &\leqslant(a^m+\sum_{k=2}^{m}|a_k^m|)^{\frac{1}{m}}\leqslant n^{\frac{1}{m}}a.\end{aligned}$$

命 $m\to\infty$ 易得 (9).

由于 A^m 的诸特征根分别为 A 的诸特征根的 m 次方幂, 所以由 (9) 可知

$$q=\lim_{m\to\infty}S(A^m)^{\frac{1}{m}}.$$

算法如下：先算出系列 (8), 再算出

$$S(A^{2^k})^{\frac{1}{2^k}}.$$

这就是 q 的近似值. 因此这一算法所需的矩阵乘法运算次数仍为 $O(k)$.

参 考 文 献

[1] 华罗庚与王元, 有限与无穷, 离散与连续, 科学通报, 12, 1963, 4~21.
[2] 华罗庚, 高等数学引论 (余篇), 科学出版社, 1984.
[3] 华罗庚, 计划经济大范围最优化的数学理论, (I)—(X), 科学通报, 12, 13, 16, 18, 21, 1984; 1, 9, 1985.
[4] 华罗庚 (Loo-Keng Hua), On the mathematical theory of globally Optimal planned economic systems, Proc. Nat. Acad. Sci; USA, V81, 20, 1984.
[5] 华罗庚, 计划经济大范围最优化数学理论, 中国财政经济出版社, 1987.

注记 (王元)：华罗庚的这一工作完成于 1957—1958 年, 于 1963 年, 首先将这项工作的摘要发表于华罗庚与王元合作的一篇文章中 ([1]), 不幸在文化大革命中, 他的手稿被查抄遗失了. 从 1982 年开始, 他经过逐步回忆, 重新写出一些手稿, 并

陆续发表了一些注记 ([3],[4]). 然后, 我根据他的手稿又重写了一遍. 最初拟发表于我们合写的书“Popularizing Mathematical Methods in the People's Republic of China–Some Personal Experiences, Birkhauser, Boston, 1987”中, 作为第十二章. 华罗庚觉得还应再做些工作及更完善之后再发表, 但不幸他于 1985 年去世, 现在将经我整理后的他的工作发表于此.

第二章

数学普及工作之初(探路(IV))及后期数学普及工作

数学普及之初 (线性规划之普及)

中国学者在运筹学、管理科学和控制论的研究, 可以追溯到钱学森在控制论方面开拓性的研究工作. 他的著作《工程控制论》在世界上有很广泛的影响. 在他的创导下, 1956 年即在科学院力学所设立了运筹学研究组, 由许国志领导, 后来这个研究组扩充成为一个研究室. "运筹学" 这个名词也是他们翻译确定的, 钱学森提倡搞运筹学的目的在于使它能为我国的社会主义国防建设与经济建设服务, 使计划的制订与运转能够建立在科学的定量分析的基础之上. 他指出: "把社会科学从量的侧面来精确化", "精确化了的政治经济学就能够把国民经济规划作得更好, 更正确".[10]

力学所运筹室研究了线性规划, 质量控制, 投入产出法等. 刘源张、王毓云与桂湘云在这个研究室工作. 他们联系实际问题进行科学研究工作, 同时也编写了小册子来普及介绍 "运筹学".

1958 年, 当数学界掀起 "理论联系实际", "数学直接为国民经济服务" 之风时, 长期在纯粹数学中, 按传统方式工作的数学家确实是茫茫然而手足无措了. 既使在被贴上 "理论联系实际" 标签的数学分支, 如微分方程与概率统计方面工作的数学家, 由于他们研究数学的指导思想与工作方式都跟研究纯粹数学一样, 所以, 同样是一筹莫展. "线性规划" 就像一道闪电, 打开了中国数学家的眼睛: 居然数学能够直接为国民经济服务!

从数学上讲, 可以将 "线性规划" 描述如下: 有一个用线性等式与不等式定义的高维空间的凸多面体 D, 及一个在 D 上定义的线性函数 L, 它称为目标函数. 欲求出 L 在 D 上取最大值或最小值的点, 即极值点.

由微积分得知这种函数在 D 内是没有局部极值的, 所以极值点一定位于 D 的边界上. 在 D 边界上目标函数仍为线性的, 依次类推, 可知目标函数的极值点必定是 D 的某个顶点, 于是从 D 的一个顶点出发, 采取代数迭代法, 每迭代一次, 即得到另一个更好的顶点, 即更接近于极值点的顶点, 也就是说使目标函数值增大 (或减少) 的点, 这就是 30 年代末与 40 年代, 由康托罗维奇 (L. V. Kantorovitch), 希区柯克 (F. L. Hitchcock) 与但泽希 (G. D. Dantzig) 等创导与发展的 "线性规划" 与其解法 "单纯形方法" 的大意. 不少实际问题均可以用 "线性规划" 来描述, 例如交通运输问题:

设有一种物资, 如小麦, 要求编制一个调运计划, 它有 m 个产地 $A_1, \cdots, A_m$,

产量各为 $a_1, \cdots, a_m$ 个单位; 它有 n 个销地 $B_1, \cdots, B_n$, 销量各为 $b_1, \cdots, b_n$ 个单位, 假定总产量与总销量相等, 即

$$\sum_{i=1}^{m} a_j = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{1}$$

又假定从 A_i 到 B_j 的单位运价是 C_{ij}, 而从 A_i 运到 B_j 的物资是 x_{ij} 个单位. 我们的问题就是要求一组 x_{ij} 使目标函数

$$S = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij} \tag{2}$$

达到最小值, 其中 x_{ij} 满足的条件为

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \cdots, m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \cdots, n \\ x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, \cdots, m, \quad j = 1, \cdots, n.\end{gathered} \tag{3}$$

这些条件 (3) 定义了 mn 维空间的一个凸多面体 D. 这些条件表示产销关系.

“到了 1950 年, 作为全国工业基地的东北地区的交通运输已经颇为繁忙”,“虽然是车如流水马如龙, 仍难适应. 煤炭, 粮食部门都深切地感到了合理调运, 节约运力的迫切需要. 当时东北计委会一个专营运输的小组”,“往往为比较两个运输方案, 不分昼夜辛勤地计算”, 终于发现了“图上作业法”. “图上作业法”这一名称是数学所的人给取的.

“图上作业法”所处理的问题就是上述的数学模型, 国外在 40 年代已经有了这一模型及解法. 我国负责运输调拨的工作者给了一种几何解法: 先在地图上标出各“产地”与“销地”. 若我们规定由 A 调拨 a 单位物资到 B, 则沿 A 至 B 的线路右侧画一箭头矢量, 矢量的起点为 A, 终点为 B, 并在矢量旁边标出 a. 所谓“对流”, 即在同一条线路的两侧均有箭头矢量. 若路线地图上有一个环路, 则环路内侧的箭头矢量的长度之和与环路外侧的箭头矢量的长度之和均不超过环路之长度的一半, 则称为无“迂回”. 于是有下面的法则:

当一个调拨方案, 即箭头矢量图, 画在地图上, 若既无对流, 对于任何环路又无迂回, 则这一调拨方案就是最优的. 反之亦然.

从任一调拨方案出发, 若有对流, 则改变分配办法可以取消对流, 若有迂回, 则可缩短外圈或内圈的箭头矢量长度来取消迂回, 经逐步调整, 即可得最佳调拨方案.

这样一来, 问题似乎解决了, 但若地图上有较多环路, 则计算就很复杂而难于应用了. 国外有一个代数的迭代程序来解决上述问题, 数学所的人称之为“表上作业法”, 比较易算.

“拔白旗”,“理论联系实际”运动席卷全国科学教育界后, 数学所的研究室被取消了, 代之以按军队建制的四个指挥部, 各设一个总指挥及一个政治委员. 概率统计、微分方程与泛函分析、数理逻辑与计算机逻辑设计各成立一个指挥部. 数学的几个抽象学科, 如数论, 代数与拓扑学等则自寻出路, 一些人转到其他学科去工作了, 一些人则组成一个指挥部, 专门研究与应用运筹学. 后来这个指挥部与力学所运筹学研究室合并组成数学所的运筹学研究室.

运筹室的大部分人下达到北京市的汽车运输公司现场, 按上述方法帮助他们修订运输计划, 或到粮食调运部门, 帮助他们制订调拨计划. 但是“图上作业法”与“表上作业法”的理论根据究竟是什么? 因为数学家长期从事于定理的严密证明工作, 对于没有见到数学证明的数学方法总觉得不放心. 于是一些人热心于这两个方法的理论证明. 经过努力, 万哲先用数学归纳法给了“图上作业法”一个证明. 越民义给了“表上作业法”一个证明. 为了扩大影响, 运筹室的人集体写书. 当时为了打倒“名利思想”, 虽然是少数人执笔甚至个人撰写的书, 都是用集体或单位的名称发表的, 首先是万哲先与王元执笔写了一本小册子. 后来, 王元、朱永津等又执笔撰写了一本教科书.

对于在全国范围内推广与普及“线性规划”, 数学所的两本书无疑起到了点火的作用. 它使很多省市的数学家也下达到工厂矿山现场去普及“线性规划”. 在全国各省市中, 以山东省最为积极, 参加的人数也最多. 1960 年 7 月 29 日,《人民日报》报道了科学院数学所在山东济南召开的运筹学现场会议. 全国各地有三百七十多名代表参加, 华罗庚与万哲先参加了这次会议.《人民日报》除作了大量报道外, 还登有江辉的短文《数学的启示》及一篇资料《什么是运筹学?》

应该承认山东省的数学家在普及“运筹学”方面是有成就的, 不仅如此, 在理论研究上更有出色工作: 若有 m 个地方, 他们之间有道路联结起来, 问从一个地方出发, 怎样找出最短的路线使之通过所有的道路, 再回到出发点? 显然, 有些道路需重复走, 才能走过所有的道路回到出发点来. 所以, 所谓最短路线, 即走过的重复道路长度最短的走法. 受到“图上作业法”的启发, 山东师范学院的青年教师管梅谷提出了这一数学模型, 并根据欧拉关于奇偶点理论, 给出了最短路线的一个类似于“图上作业法”的判别法. 邮递员投送信件及大城市垃圾车收集垃圾的行驶路线设计都符合管梅谷提出的数学模型. 外国文献上称之为“中国邮递员问题”, 国外有不少数学家简化与发展了管梅谷的工作, 华罗庚很赞赏管梅谷的贡献, 称他为“山东第一条好汉!”

山东省曲阜的数学家发明了一个“麦场设置中的数学方法”, 即将每一块麦田

看成一个点, 将麦田的麦子总产量集中在这个点上, 然后算出麦场的合理位置, 使将麦子都集中到这一麦场去打场所需的动力最少. 当然这一方法完全没有考虑到麦场位置的交通, 道路, 通风等因素, 所以没有什么实际应用价值. 因毛泽东视察山东时, 曾手持一本山东曲阜师范学院师生编写的《公社数学》照了一张相, 于是数学所就紧跟着, 到北京郊区去普及《公社数学》中的"麦场设置中的数学方法". 华罗庚与王元等曾到北京各区县去转了一圈, 考察了一下普及这一方法的效果. 当时为了扩大影响, 还用华罗庚署名在《数学学报》上登过一篇关于《麦场设置》的文章.

后来, 华罗庚又把科大学生带到北京市的运输部门与郊区农村去实习"图上作业法"与"麦场设置法", 这是他的数学教育改革的一个特色, 他还派温赛海与杨德庄去帮助时传祥搞清洁车运输, 收到良好效果.

统筹方法平话及补充[①]

前　言

统筹方法, 是一种为生产建设服务的数学方法. 它的实用范围极为广泛, 在国防、在工业的生产管理中和关系复杂的科研项目的组织与管理中, 皆可应用. 但是, 这种方法, 只有在社会主义制度下, 才能更有效地发挥作用. 毛主席指出:"世间一切事物中, 人是第一个可宝贵的. 在共产党领导下, 只要有了人, 什么人间奇迹也可以造出来." 由于群众的主观能动性和创造性的发挥, 顺利解决当前工作中的问题, 那么, 今天的主要矛盾, 明天将会变为次要矛盾. 因此, 我们必须根据实际情况不断修改我们的流线图, 及时地抓住主要矛盾, 合理地指挥生产.

"平话"是平常讲话的意思. 由于这是一本普及性和推广性的小册子, 因此, 主要的概念讲了, 许多具体细致处不可能讲得太多. 但是, 为了满足部分读者的要求, 在书中适当地补充了有关理论推导的章节. 一般读者对这一部分可以略过不读.

在这本小册子里, 讲的主要是有关时间方面的问题, 但在具体生产实践中, 还有其他方面的许多问题. 这种方法虽然不一定能直接解决所有问题, 但是, 我们利用这种方法来考虑问题, 也是不无裨益的.

这本册子虽小, 但在编写过程中, 由于很多同志的帮助, 特别是最近和一些有实际经验的同志共同学习, 发现了一些新东西, 进行修改补充, 易稿不下十次. 因此, 与其说这是个人所编写的, 还不如说这是大家的创造和发展, 由我来执笔的更确切些. 为此, 特向这些同志表示深深感谢.

由于我的水平限制, 在这本小册子中, 一定有不少欠妥之处, 请读者批评指正.

§1 引　　子

想泡壶茶喝. 当时的情况是: 开水没有. 开水壶要洗, 茶壶茶杯要洗; 火已升了, 茶叶也有了, 怎么办?

办法甲: 洗好开水壶, 灌上凉水, 放在火上, 在等待水开的时候, 洗茶壶、洗茶杯、拿茶叶, 等水开了, 泡茶喝.

①本文是作者在 1965 年 6 月 6 日"人民日报"发表的"统筹方法平话"一文的基础上, 进一步修改而成的.

办法乙：先做好一些准备工作，洗开水壶，洗壶杯，拿茶叶，一切就绪，灌水烧水，坐待水开了泡茶喝.

办法丙：洗净开水壶，灌上凉水，放在火上，坐待水开，开了之后急急忙忙找茶叶，洗壶杯，泡茶喝.

哪一种办法省时间，谁都能一眼看出第一种办法好，因为后二种办法都“窝了工”.

这是小事，但是引子，引出一项生产管理等方面有用的方法来.

开水壶不洗，不能烧开水，因则洗开水壶是烧开水的先决问题. 没开水、没茶叶、不洗壶杯，我们不能泡茶. 因而这些又是泡茶的先决问题. 它们的相互关系，可以用图 1-1 的箭头图来表示. 箭杆上的数字表示这一行动所需要的时间，例如 $\xrightarrow{15}$ 表示从把水放在炉上到水开的时间是十五分钟.

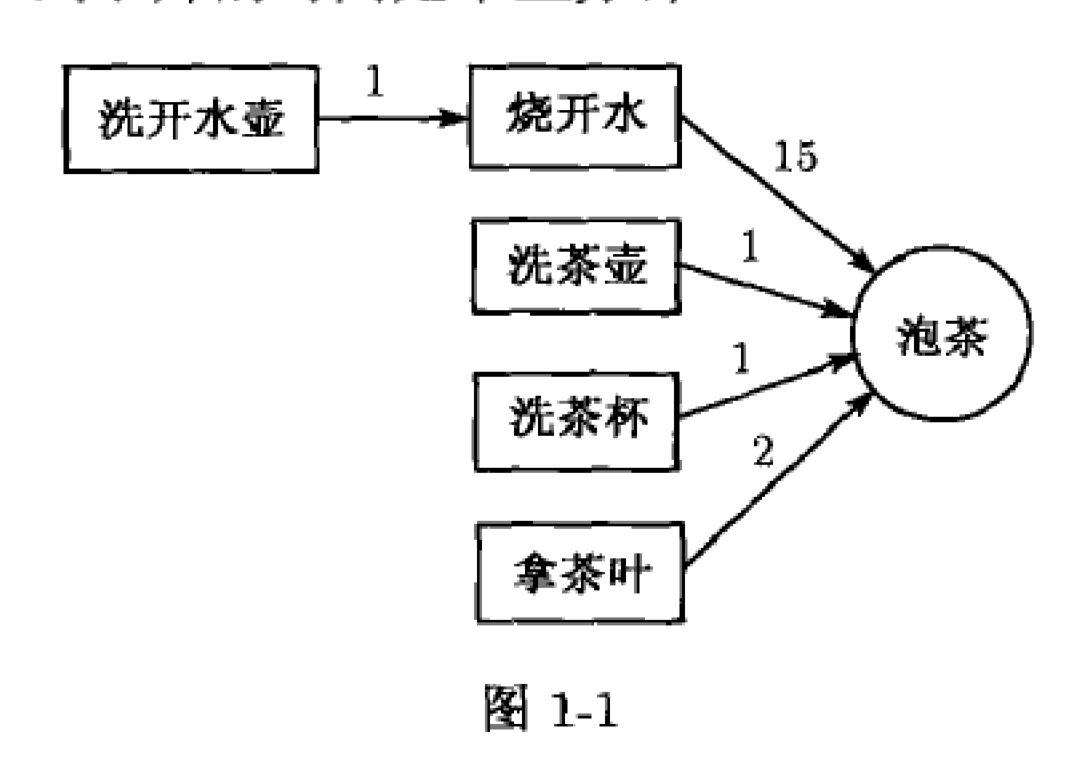


图 1-1

从这个图上可以一眼看出，办法甲总共要 16 分钟 (而办法乙、丙需要 20 分钟). 如果要缩短工时、提高工作效率，主要抓的是烧开水这一环节，而不是拿茶叶这一环节. 同时，洗壶杯、拿茶叶总共不过 4 分钟，大可利用“等水开”的时间来做.

是的，这好像是废话，卑之无甚高论. 有如，走路要用两条腿走，吃饭要一口一口吃，这些道理谁都懂得，但稍有变化，临事而迷的情况，确也有之. 在近代工业的错综复杂的工艺过程中，往往就不能像泡茶喝这么简单了. 任务多了，几百几千，甚至有好几万个任务；关系多了，错综复杂，千头万绪，往往出现万事具备，只欠东风的情况，由于一两个零件没完成，耽误了一架复杂机器的出厂时间. 也往往出现：抓得不是关键，连夜三班，急急忙忙，完成这一环节之后，还得等待旁的部件才能装配.

洗茶壶，洗茶杯，拿茶叶没有什么先后关系，而且同是一个人的活，因而可以合并成为

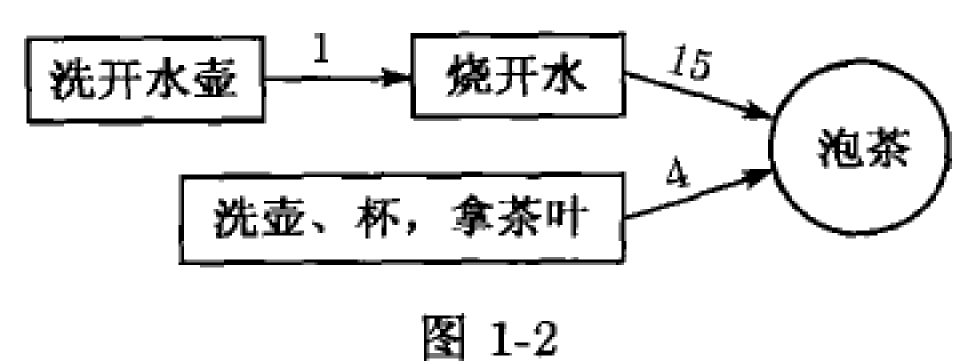


图 1-2

用数字表示任务, 上面的图形可以写成为

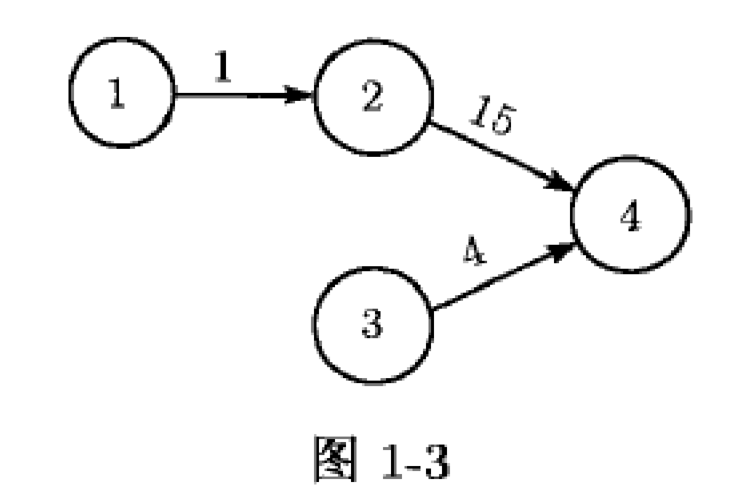


图 1-3

1- 洗开水壶; 2- 烧开水; 3- 洗壶、杯, 拿茶叶; 4- 泡茶

看来这是“小题大做”, 但在工作环节太多的时候, 这样做就非常有必要了.

这样一个数学代表一个任务的方法称为 单代号法, 每一个数目字代表一个任务, 写在箭尾上, 箭杆上的数学代表完在这个任务所需要的时间.

另一个方法称为 双代号法. 我们把任务名称写在箭杆上, 如图 1-4. 箭头与箭尾衔接的地方称为节点 (或接点), 把节点编上号码. 图 1-4 成为

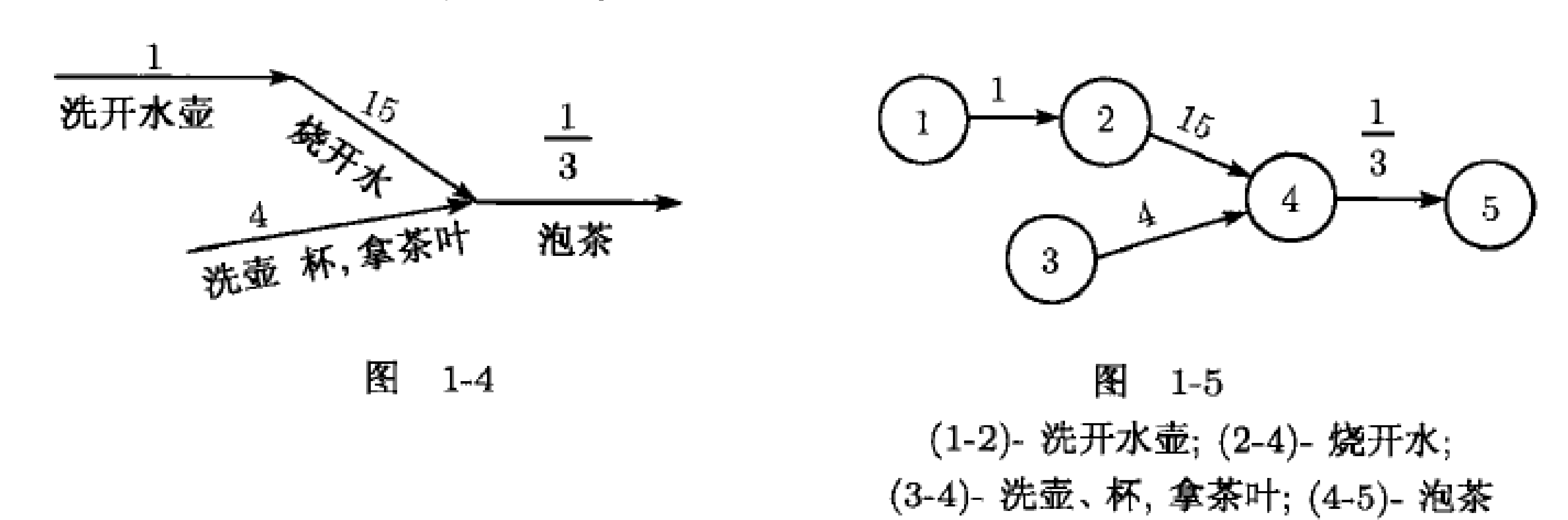


图 1-4

图 1-5

(1-2)- 洗开水壶; (2-4)- 烧开水;

(3-4)- 洗壶、杯, 拿茶叶; (4-5)- 泡茶

单代号法与双代号法哪个好, 实际上是各有优点. 我们用双代号法开始讲, 在讲的过程中穿插着讲单代号法.

一 肯 定 型

§2 工序流线图与主要矛盾线

一项工程 (或一个规划), 总是包含多道工序的. 如果已经有了现成的计划, 我们可以依照这个计划和各工序间的衔接关系, 用箭头来表示其先后次序, 画出一个各项任务相互关系的箭头图, 注上时间, 算出并标明主要矛盾线. 这个箭头图, 我们称它为 工序流线图. 把它交给群众, 使群众了解自己在整个工作中所处的地位, 有利于互赶互帮, 共同促进. 把它交给领导, 便于领导掌握重点, 统筹安排, 合理调整, 提高工效.

好啦, 现在有这样一项工作, 一共有 17 道工序, 我们把它画出箭头图 (见图

1-6), 图上每个工序我们把它叫做一项任务.

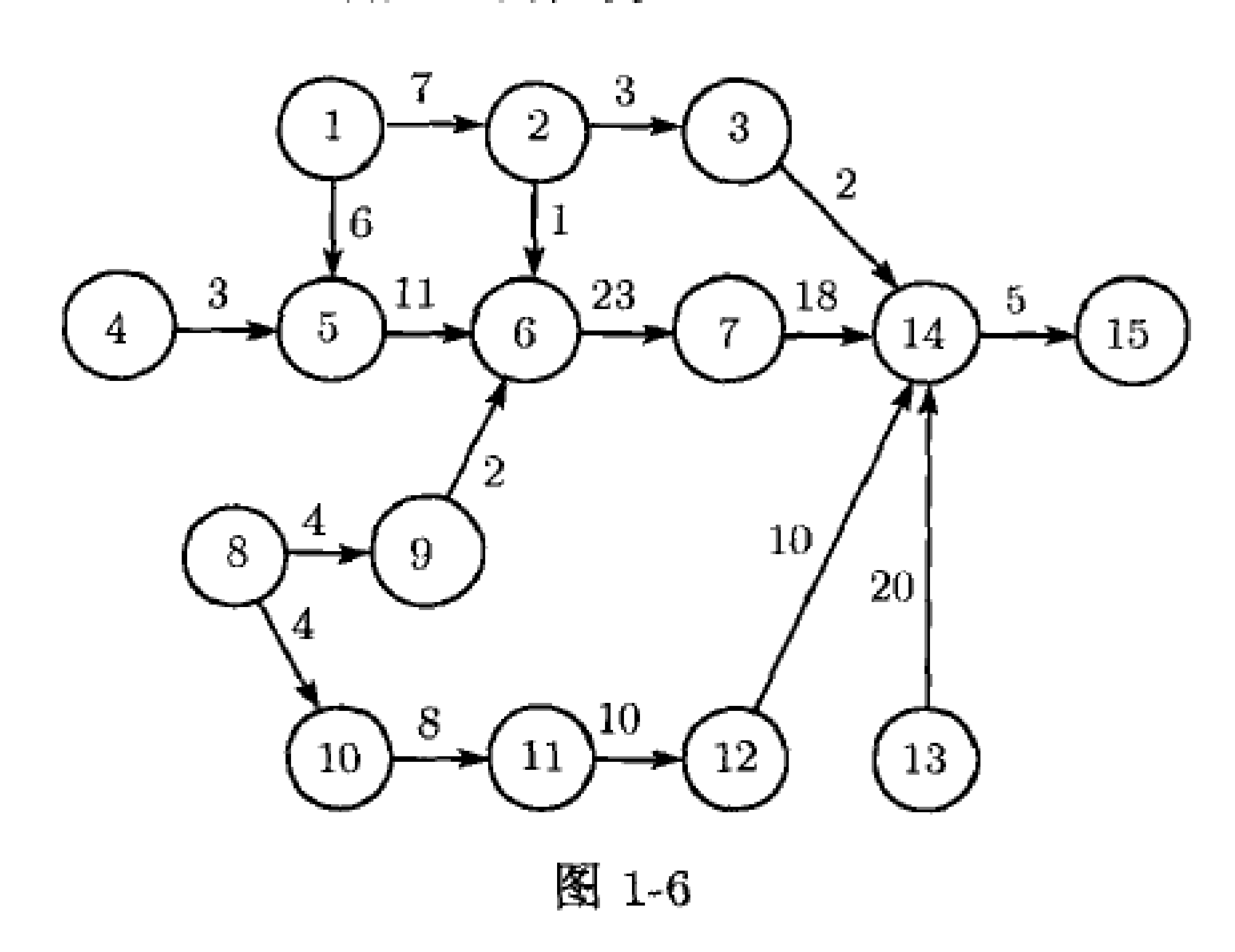
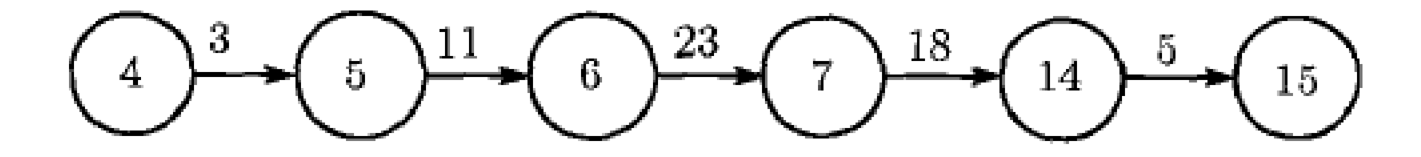


图 1-6

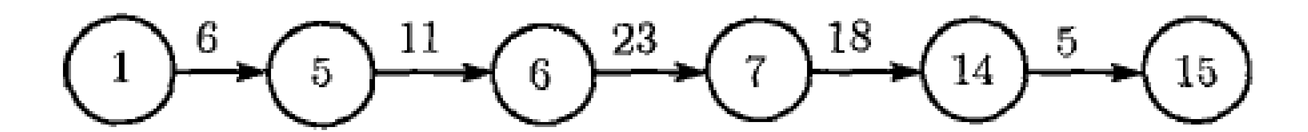
④ → ⑤ → ⑥表示任务 (4-5) 完成后, 才能进行任务 (5-6), 又如任务 (6-7) 必须在 (2-6)、(5-6)、(9-6) 三项任务都完成的基础上才能开始进行.

④ $\xrightarrow{3}$ ⑤表示自任务 (4-5) 的开工之日起到完成之日 (亦即下一任务可以开工之日) 止, 共需三周. 任务 (7-14) 开工后 18 周才能把半成品送到任务 (14-15), 而最后任务 (14-15) 必须待任务 (3-14)、(7-14)、(12-14)、(13-14) 都完成之后, 再用 5 周的时间才能交出成品.

图画好之后, 进行以下的分析: 算出每条线路的总周数. 例如线路



共需 3+11+23+18+5=60 周. 把所有的线路都加以计算, 其中需要周数最多的线称为*主要矛盾线*. 这一工序流线图的主要矛盾线是:



共 6+11+23+18+5=63 周.

用红色 (或粗线) 把主要矛盾线标出来 (同时如有必要也可以用其他颜色标出一些次主要矛盾线). 在工作进程中, 主要矛盾线上延缓一周, 最后完成的日期也必然延缓一周, 提前完成也会使产品提前出厂. 把这图交给群众, 使群众一目了然, 知道此时此地本工种所处的地位, 有利于职工发挥主观能动性. 经过若干时日, 如果在主要矛盾线上进行得比预期迅速, 或非主要矛盾环节有所延误, 这时必须重新检查和修改流线图, 并特别注意主要矛盾线是否已经转移.

这种图形的作用远不止此, 还可以举出以下几方面好处. 例如:

(1) 从图 1-6 可以看出, 任务 (4-5) 可以此任务 (1-5) 缓开工三周而不影响进度, 任务 (13-14) 更不必说可以缓开工 38 周, 但不能再缓了 (每一任务都可以算出最迟开工期限、最早开工期限及时差, 为了简单起见这儿暂且不谈).

(2) 从图上看出可以从非主要矛盾线上抽调人员支援主要矛盾线, 这样可以提高效率, 即使抽去的人员工种不同, 一个人只顶半个人用, 有时也并不吃亏, 但抽调后必须重新画图.

当然流线图还有不少其他的好处, 这儿就不一一列举了.

我想在此也乘便提一下, 主要矛盾线可能不止一条. 一般讲来, 安排得好的计划, 往往出现有关零件同时完成, 组成部件; 有关部件同时完成, 进行总体装配的情况. 在这种情况下主要矛盾方面就不是用一条线表达了. 愈是好的计划, 红线愈多, 多条红线还可以作为组织劳动竞赛的依据.

当然, 终点也可能不止一个. 例如, 化学分析可以陆续地分析出若干种元素, 获得每一种元素都可以作为终点. 在这种情况下, 我们可以将起始点至每一个终点所需要的时间进行比较, 把需要时间最长的线路, 定为主要矛盾线. 但另一方面, 也可以根据产品的主次, 定出主要矛盾线来. 换言之, 即将起始点到主要产品的终点需要时间最长的线路, 定为主要矛盾线.

§4 分细与合并

从图 1-6 看出任务 (6-7) 的完成需要 23 周, 时间最长, 这就启发我们考虑为了加快进度, 可否把任务 (6-7) 重新组织一下, 其方法之一是要细致地画一⑥ → ⑦的工序流线图, 标出主要矛盾线, 研究缩短时间的可能性. 例如, 一个单向挖掘的隧道工程, 我们采用两头开挖的方法, 这样, 一个任务变为两个任务, 加快了进度 (请读者设想一下, 一个任务变为两个, 箭头图怎样画).

为了容易看得清楚或计算方便起见, 有时我们在图上也把一些任务合并考虑, 如将图 1-1 合并为图 1-2.

又如图 1-6 可以将②③合并、⑥⑦合并、⑩⑪⑫合并得图 1-7.

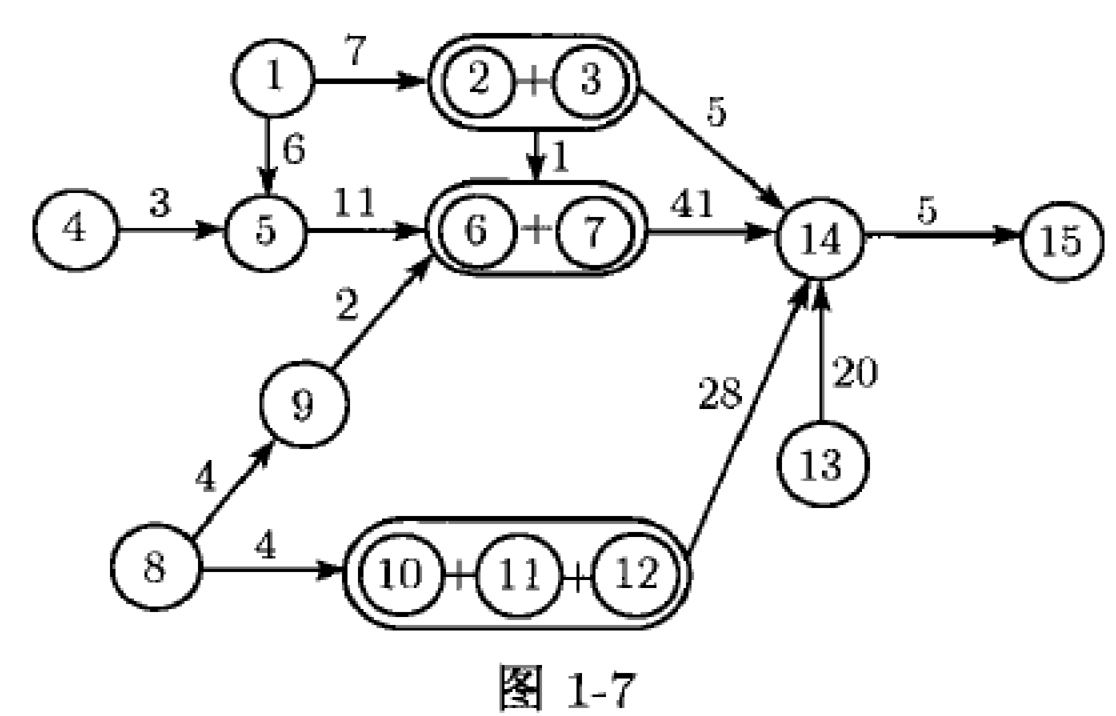


图 1-7

并得多么粗, 分得多么细, 随客观需要与具体情况而定. 具体负责的技术员、调度员为了便于掌握, 应当把图画得更详尽些, 更细致些, 供领导和群众一般参考的可以画得粗些. 密如蛛网, 望而却步的工序流线图, 不但不易获得群众的支持, 而且难使领导看出重点, 作到心中有数. 但不细致, 又不能发现关键所在. 因此, 在主要矛盾线上, 每一环节都值得分细研究. 这样可以找出缩短工时的可能性.

§4 零的运用

在数学史上, 零的出现是一件大事, 在统筹方法中引进"虚"任务, 用"0"时间, 也是应当注意的一个重要方法.

例一: 把一台机器拆开, 拆开后分为两部分修理. 称为甲修、乙修, 最后再装在一起. 这样的图怎样画? 共有四个任务:



在"拆""装"之间有两个任务:

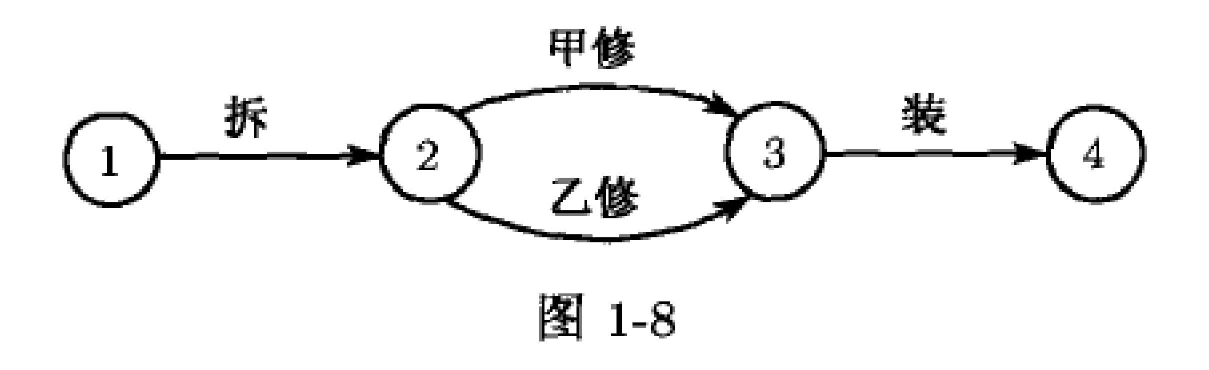


图 1-8

"② → ③"将同时代表两个任务了, 不好办. 我们建议用 $\xrightarrow{0}$ 表示"虚"任务, 这样就可以克服这一困难, 把图画成为

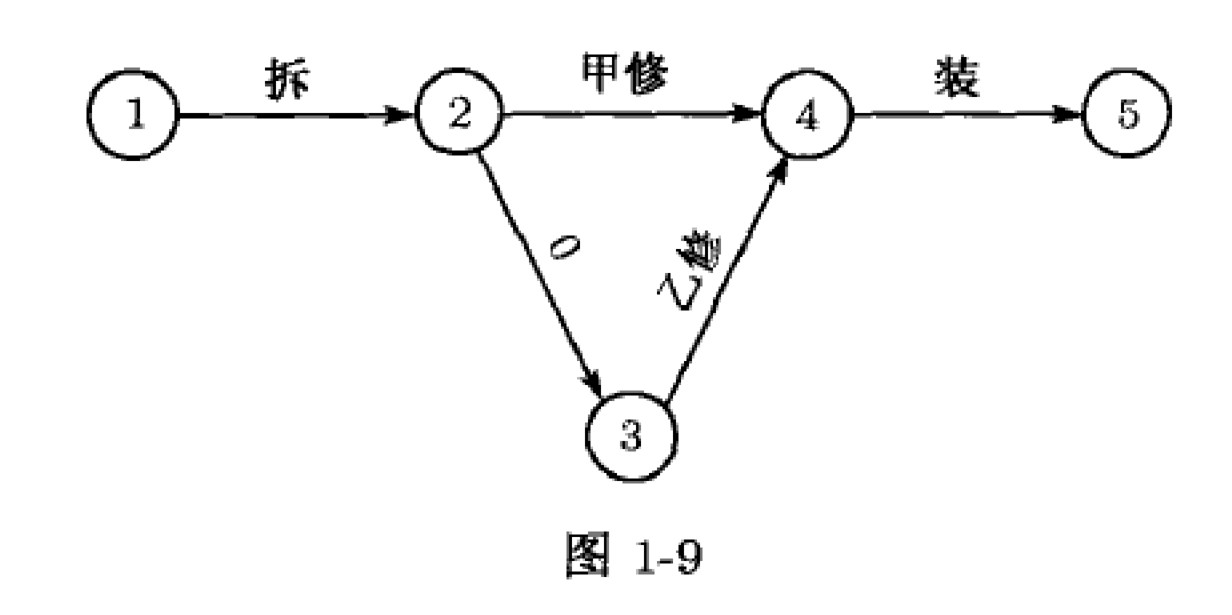


图 1-9

也可以对称地画成为

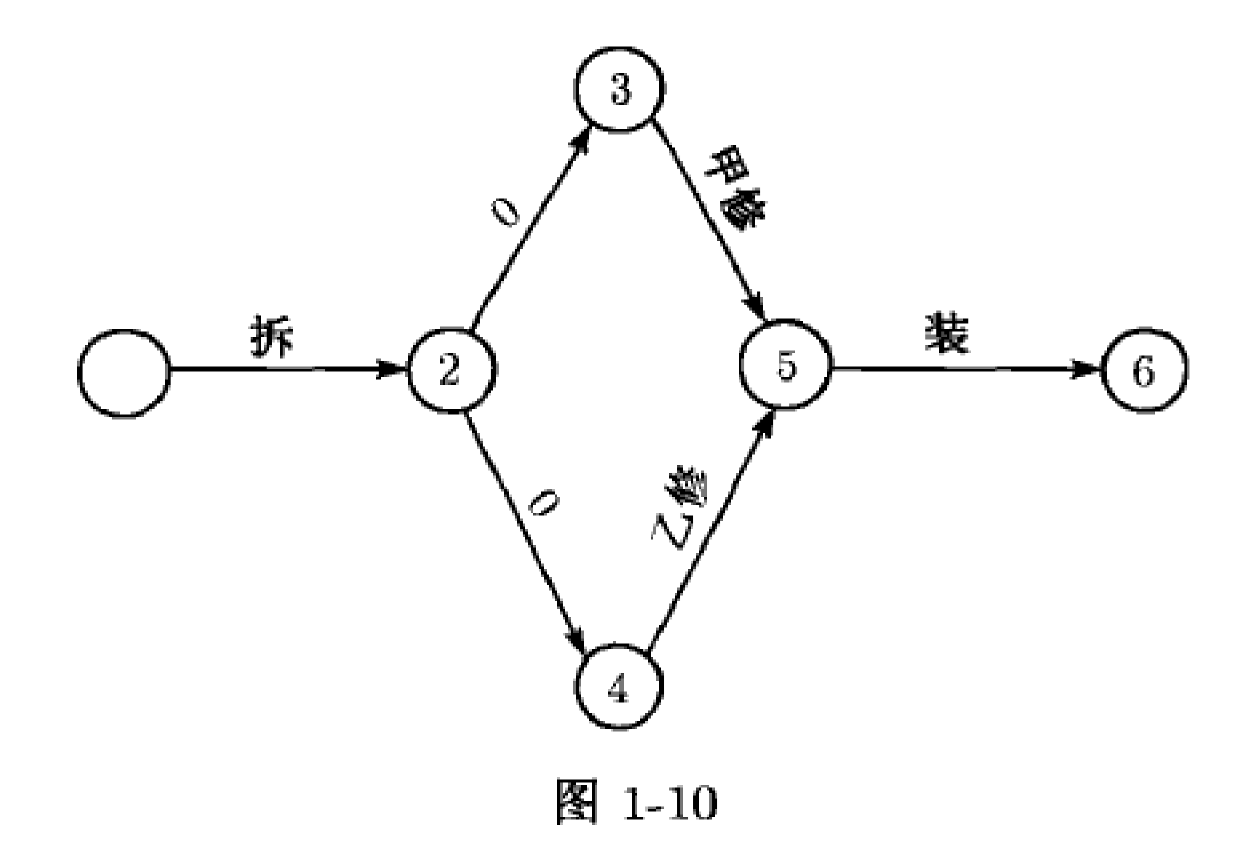


图 1-10

当然, 为了区别起见, 可以把一个任务硬分为两段:

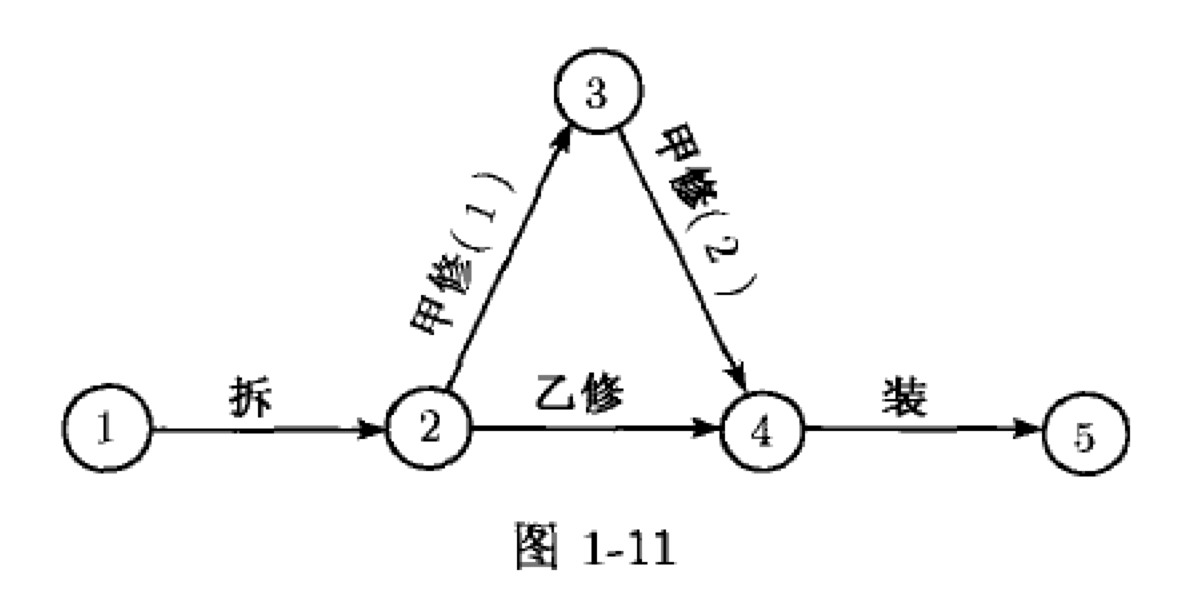


图 1-11

也可以画成为

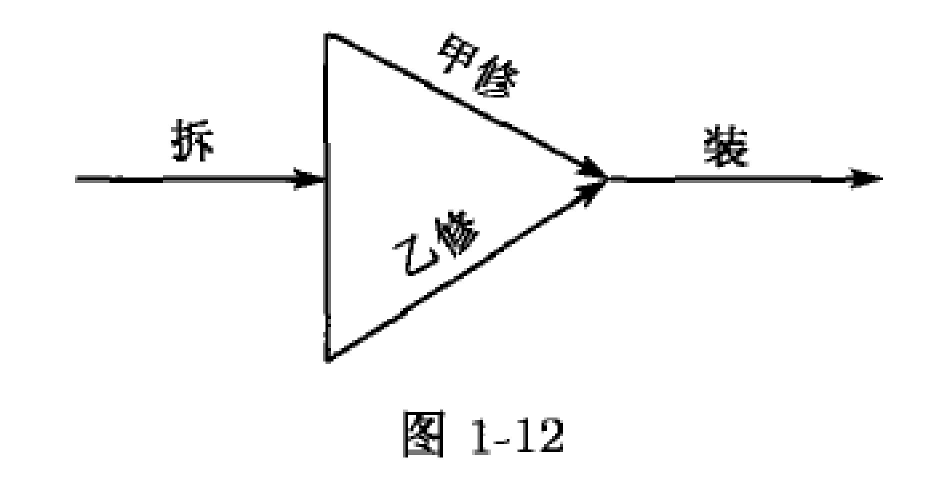


图 1-12

这一“不标箭头的竖线”的方法, 在用“时间坐标”时合适.

以下的图形, 更显示出用 $\xrightarrow{0}$ 的必要性:

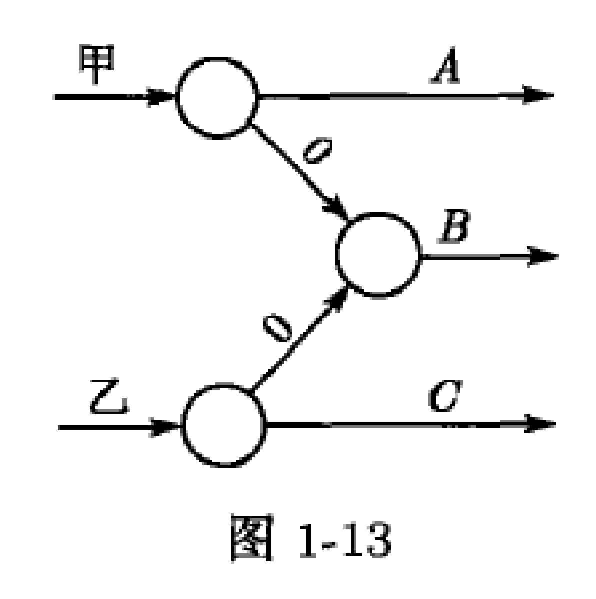


图 1-13

它表示工序 A、C, 各必须在甲、乙完成的基础上进行, 而工序 B 却需要在甲、乙两工序都完成的基础上进行.

在把一个任务拆成两个任务的时候 (例如: 决定一条水沟从两头开挖), 也要引进“0”箭头 ($\xrightarrow{0}$). 例如要把

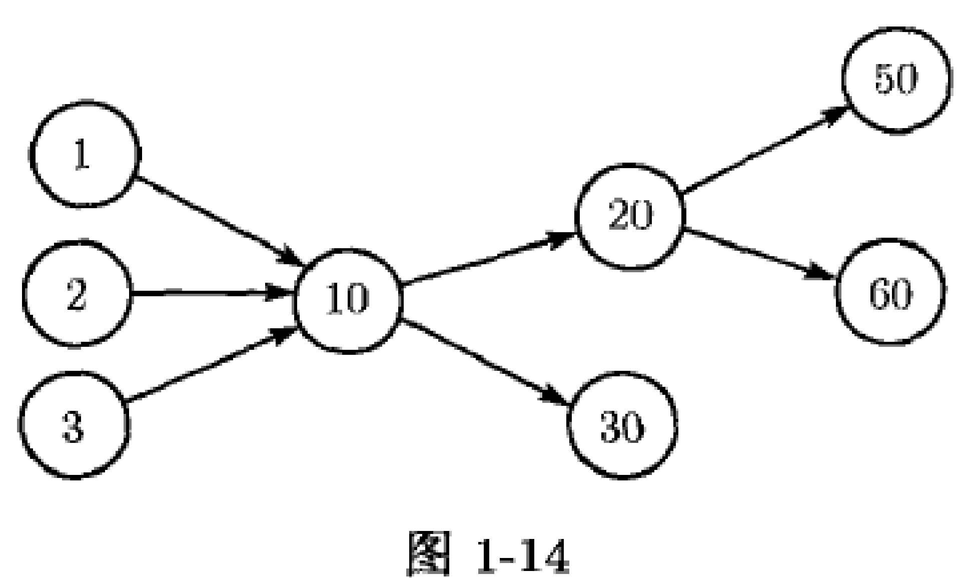


图 1-14

中任务 ⑩ → ⑳ 分拆为两个任务 ⑩ →⑳、⑪→⑳时, 也要使用 $\xrightarrow{0}$, 即得下图:

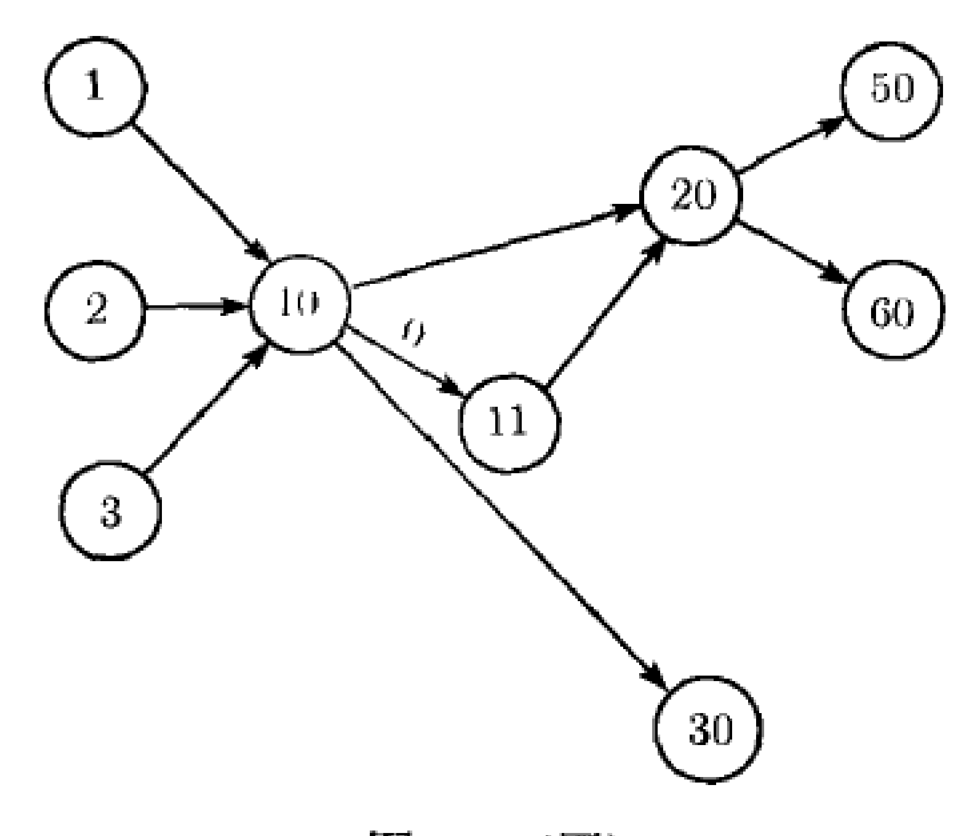


图 1-15(甲)

本质上, 这一问题与前例完全相同, 当然也可以用“折断法”、“双 $\xrightarrow{0}$ 法”, 或“无箭头竖线法”. 用无箭头竖线法的画法如下图:

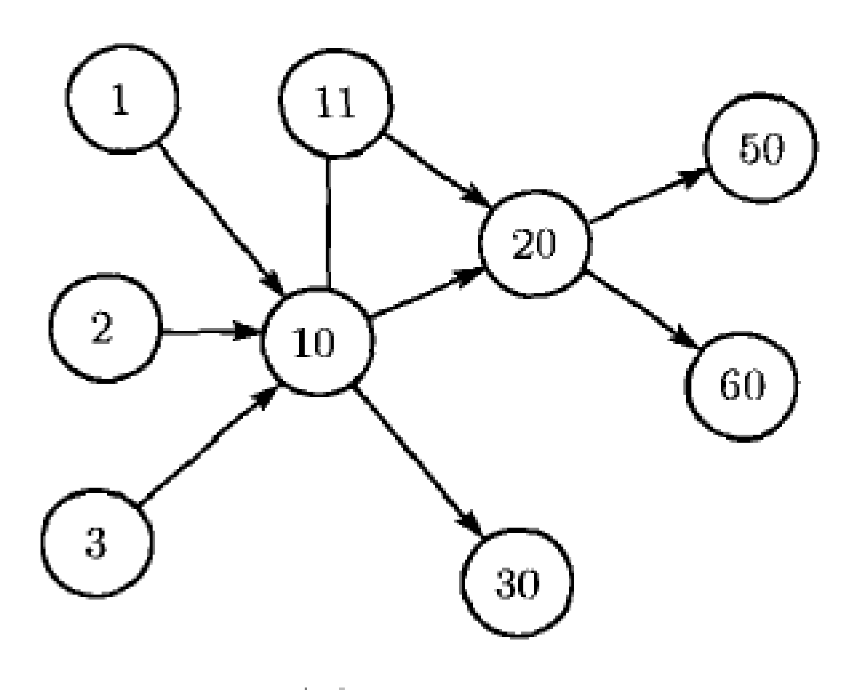
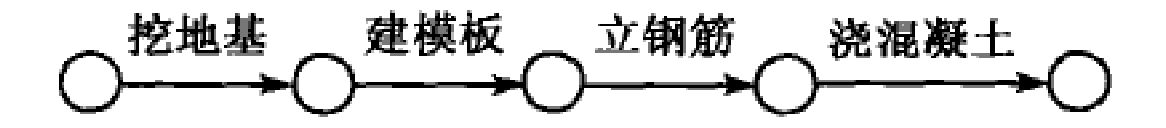


图 1-15(乙)

例二：在一个较复杂些的工程施工中，我们把



四道工序 (以下简称为挖、板、钢、浇)，各分为二交错作业时，也要用 $\xrightarrow{0}$，画成为

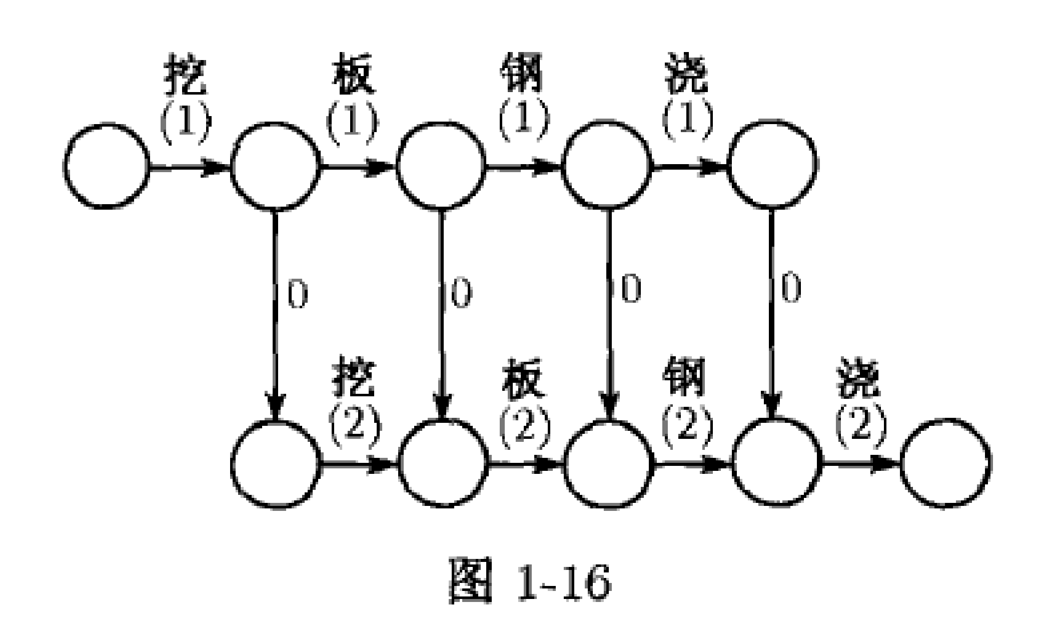


图 1-16

当然，也可以画成为

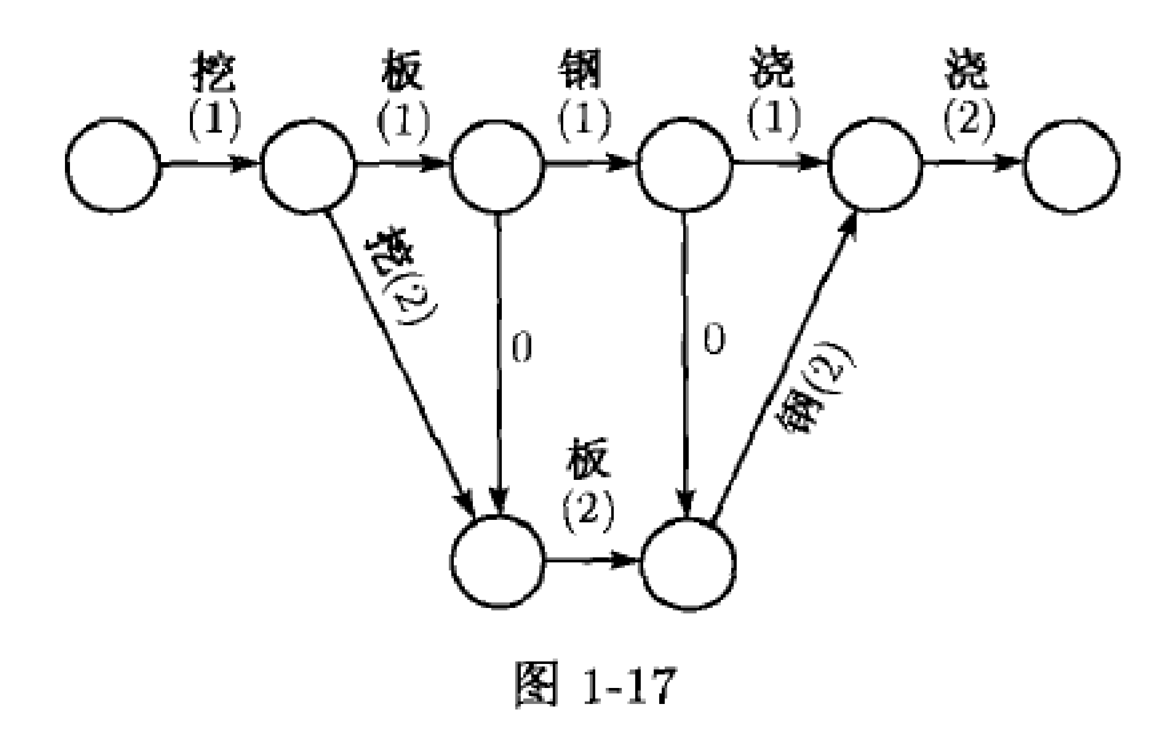


图 1-17

这是指在四种工作都只有一套人进行施工的情况下而言的. 即挖地基 (1) 的人也就是挖地基 (2) 的人 (如果人多了，当然也可以进行平行作业).

读者试分析以下几种画法，并指出其缺点.

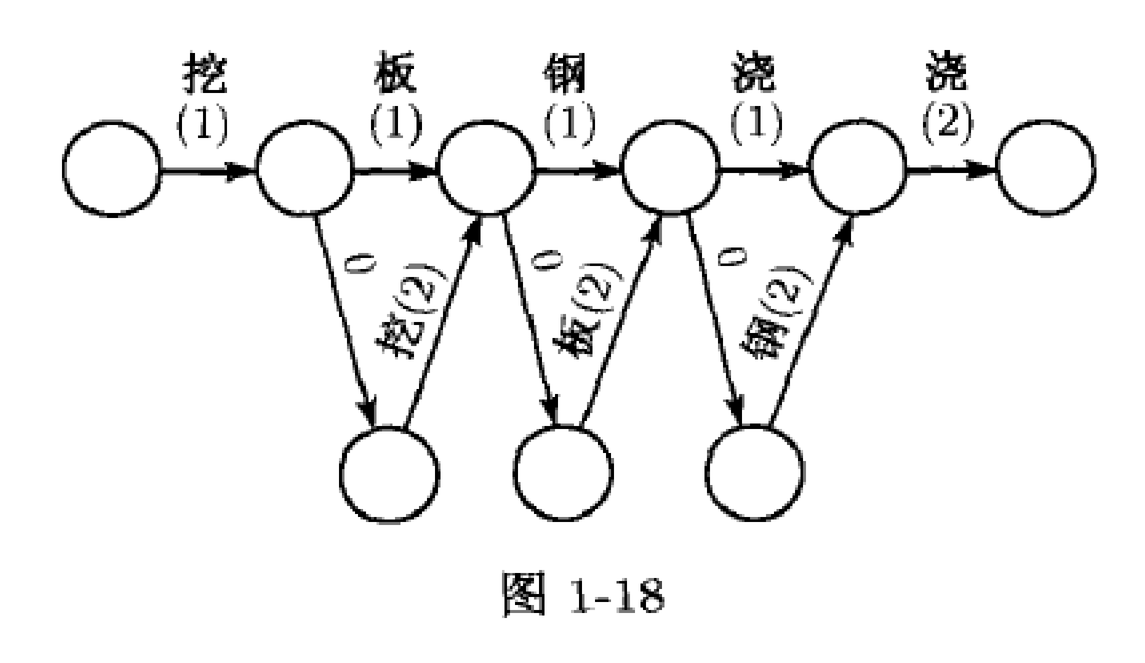


图 1-18

[“钢 (1)”不必在“挖 (2)”完成之后，其他类推] 又

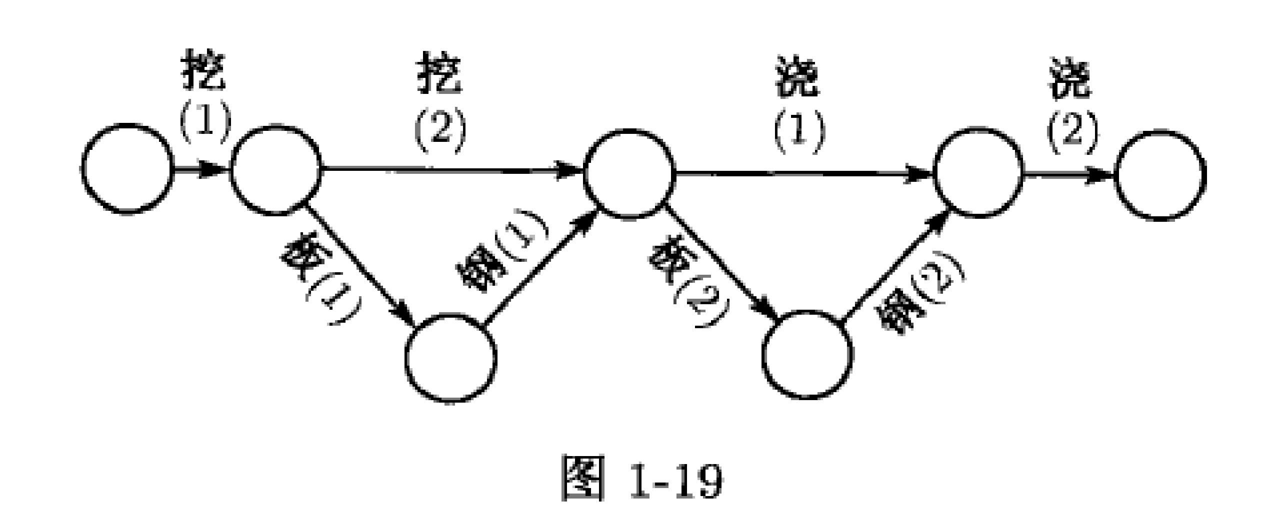


图 1-19

[“钢 (1)”不必在板 (2) 之前, 其他类推]

更进一步, 读者可以析析一下, 三段交叉的作业, 作如下面法对不对?

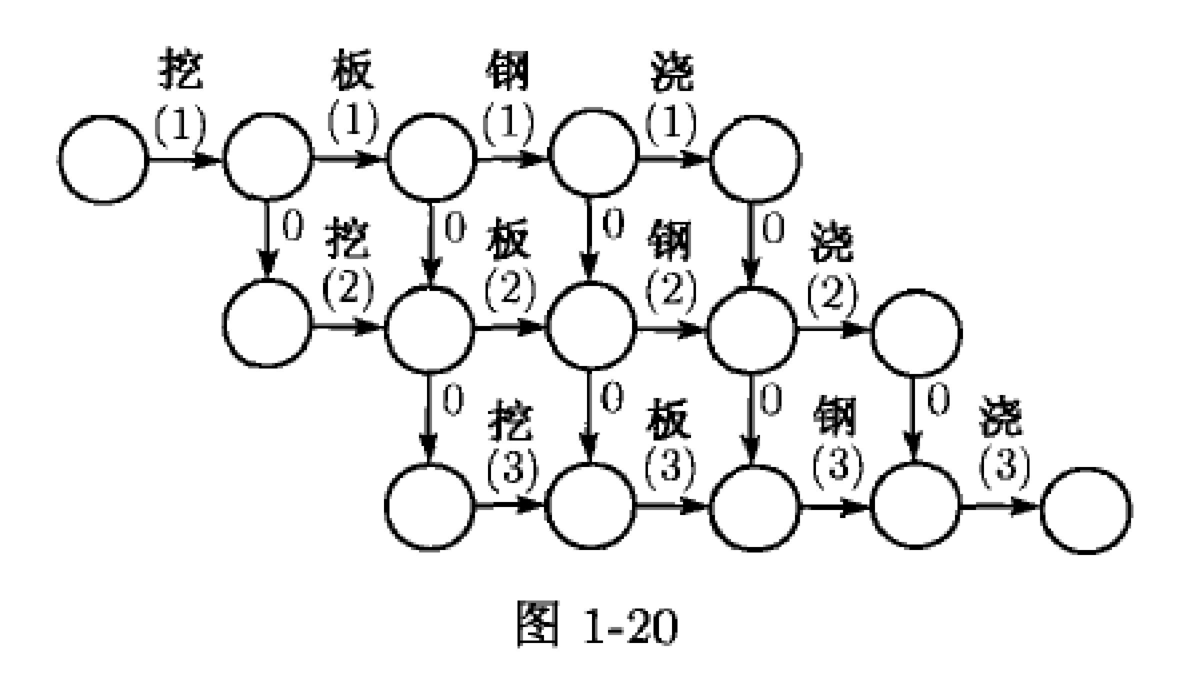


图 1-20

严格地讲, 这样画是有问题的, 因为 $\xrightarrow{\text{挖(3)}}$ 不必在 $\xrightarrow{\text{板(1)}}$ 之后; 同样 $\xrightarrow{\text{钢(1)}}$ 和 $\xrightarrow{\text{浇(1)}}$ 也不一定分别在 $\xrightarrow{\text{板(3)}}$ 和 $\xrightarrow{\text{钢(3)}}$ 之前. 正确的画法应当是:

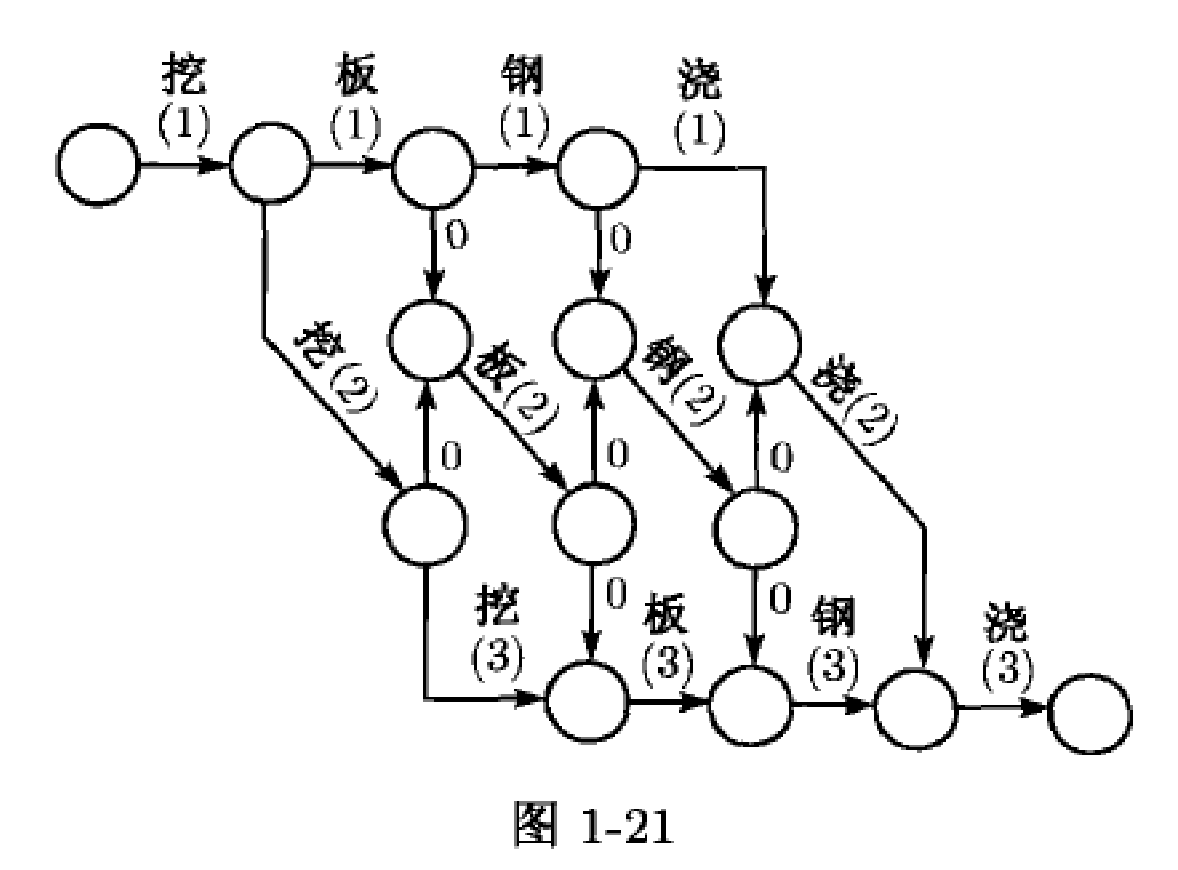


图 1-21

用一个零箭头“$\uparrow_0$”断绝了由 $\xrightarrow{\text{板(1)}}$ 转入 $\xrightarrow{\text{挖(3)}}$ 的道路. 用这样的画法, 三段以上的交叉作业, 就不再有其他的困难了.

也有人用“同工种人力转移线”(– · – · –· →) 来处理这一问题. 画成:

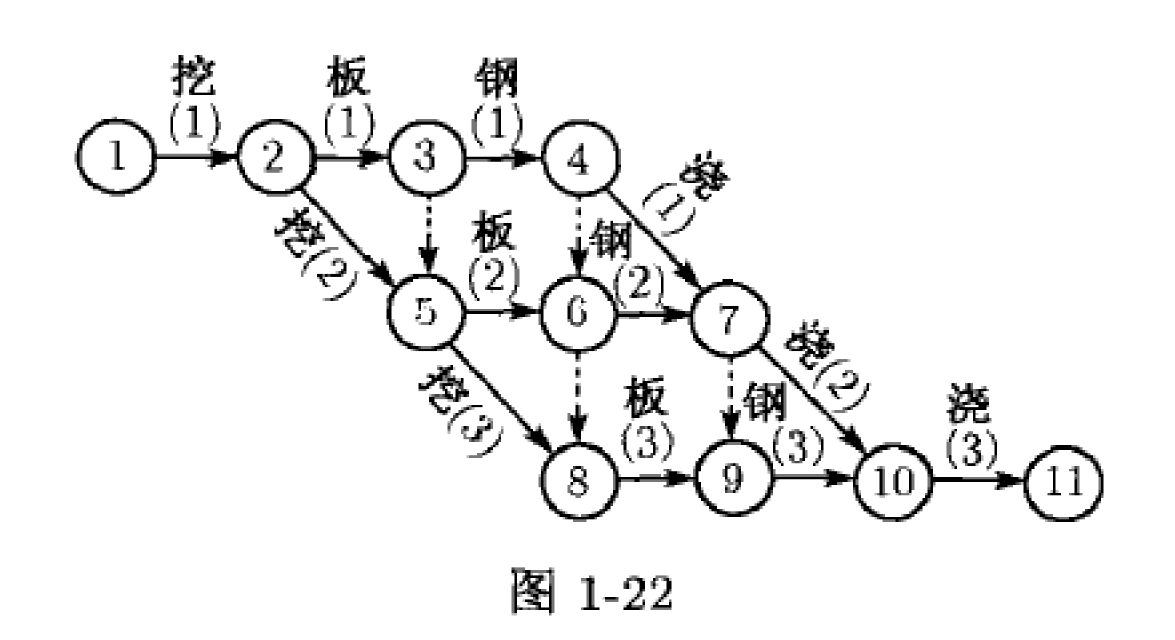
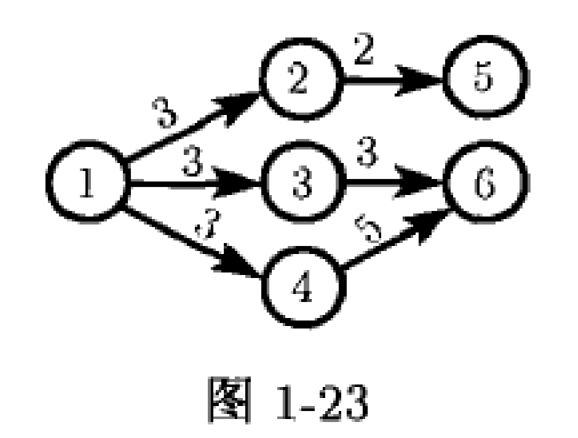


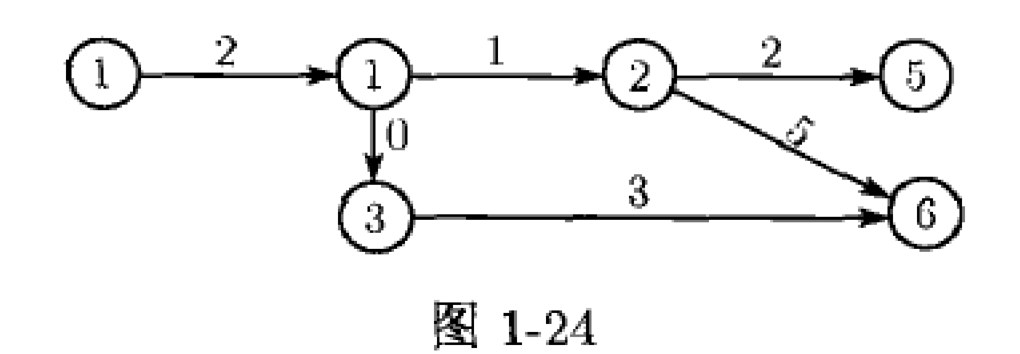
图 1-22

“– · –· →”仅表示前后两同工种工序间的衔接关系, 并不同时表达不同工种工序之间也有衔接关系. 例如: ③– · –· →⑤仅表示由“板 (1)”出发, 只准走向“板 (2)”, 而不准走到非“板”的“挖 (3)”上去. 同样, ⑦– · –· →⑨仅表示“钢 (3)”以“钢 (2)”的完工为前提, 而并不依赖“浇 (1)”. 这方法的缺点, 在于多引进了一种符号“– · –· →”

例三: 有一项工程如下图


图 1-23

它不能代表: 一个任务做了两天后, 任务 (3-6) 开始, 做了三天后, 任务 (2-5)(4-6) 开始. 代表这个情况的图, 我们应当画成为


图 1-24

实际上, 这个任务是分成两段① $\xrightarrow{2}$①′和①′$\xrightarrow{1}$ ②进行的.

图 1-23 容易被误解为 (1-2)(1-3)(1-4) 是三个任务, 因而把人力、工时、设备、原材料算重了.

有时我们还可以用一个“虚”开始点, 把各个不同的开始点, 联成为一个开始点. 如图 1-25, 从起始点⓪可引出的四个任务 (0-1)(0-4)(0-8)(0-13), 都是虚任务. 这样可以把任务 (13-14) 延缓开工的可能性都表达在图上了.

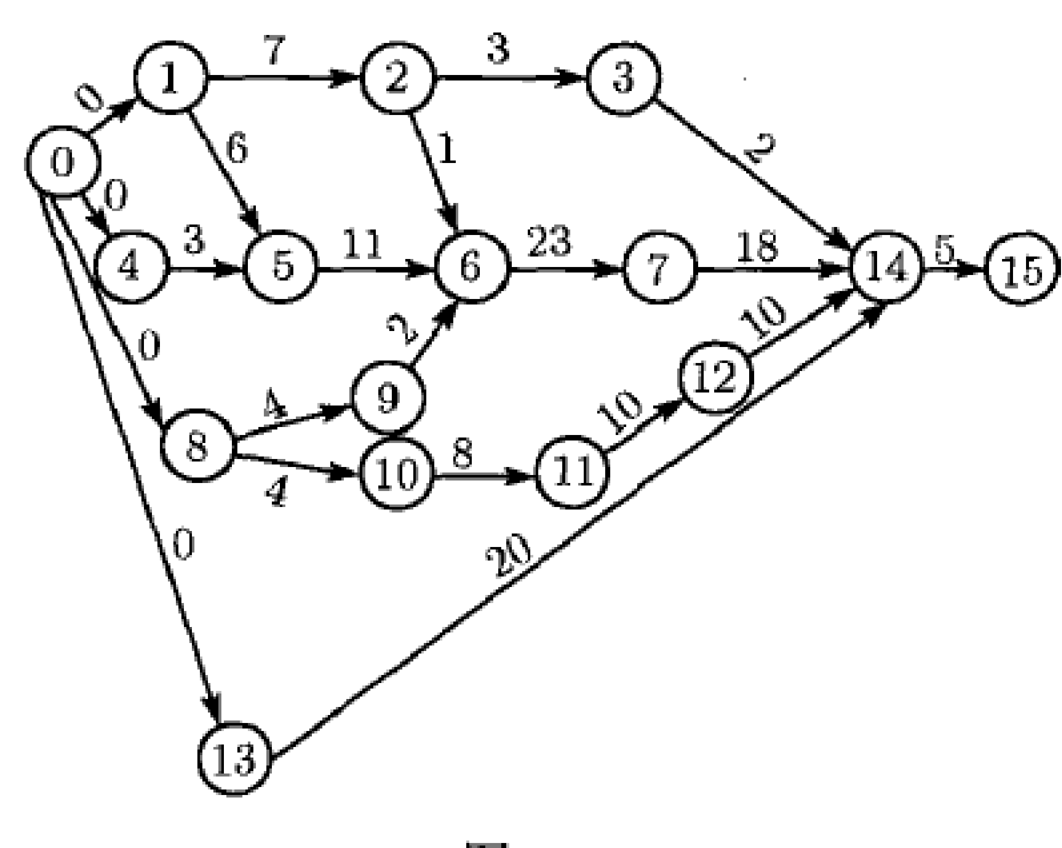
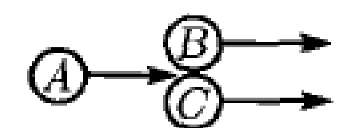
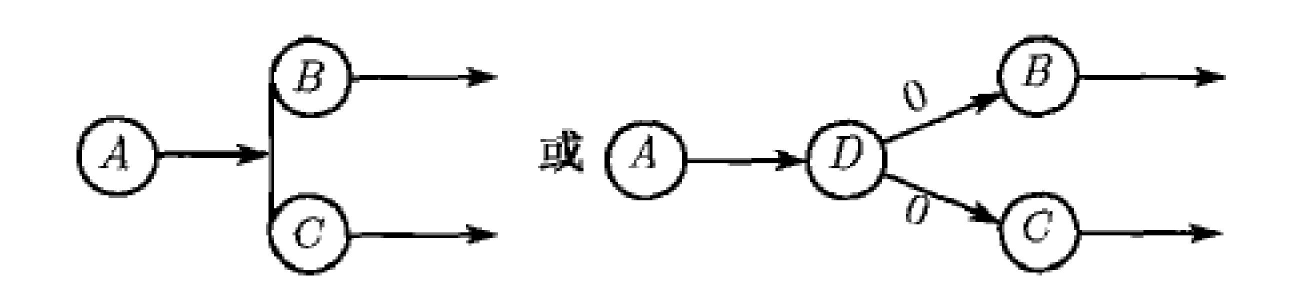


图 1-25

这儿特别指出一下："$\xrightarrow{0}$" 的运用在单代号法中更为重要. 如果一个任务Ⓐ完成后接着搞两个任务Ⓑ 和Ⓒ. 与其画成为



不如画成为



同时, 请大家注意,"休息" (不是假期性质的) 也必须画上, 这是没有工作但有时间的箭头. 例如, 等待混凝土干燥. 又如一些工人调往其他处工作. 我们有时用虚线表示, 如：

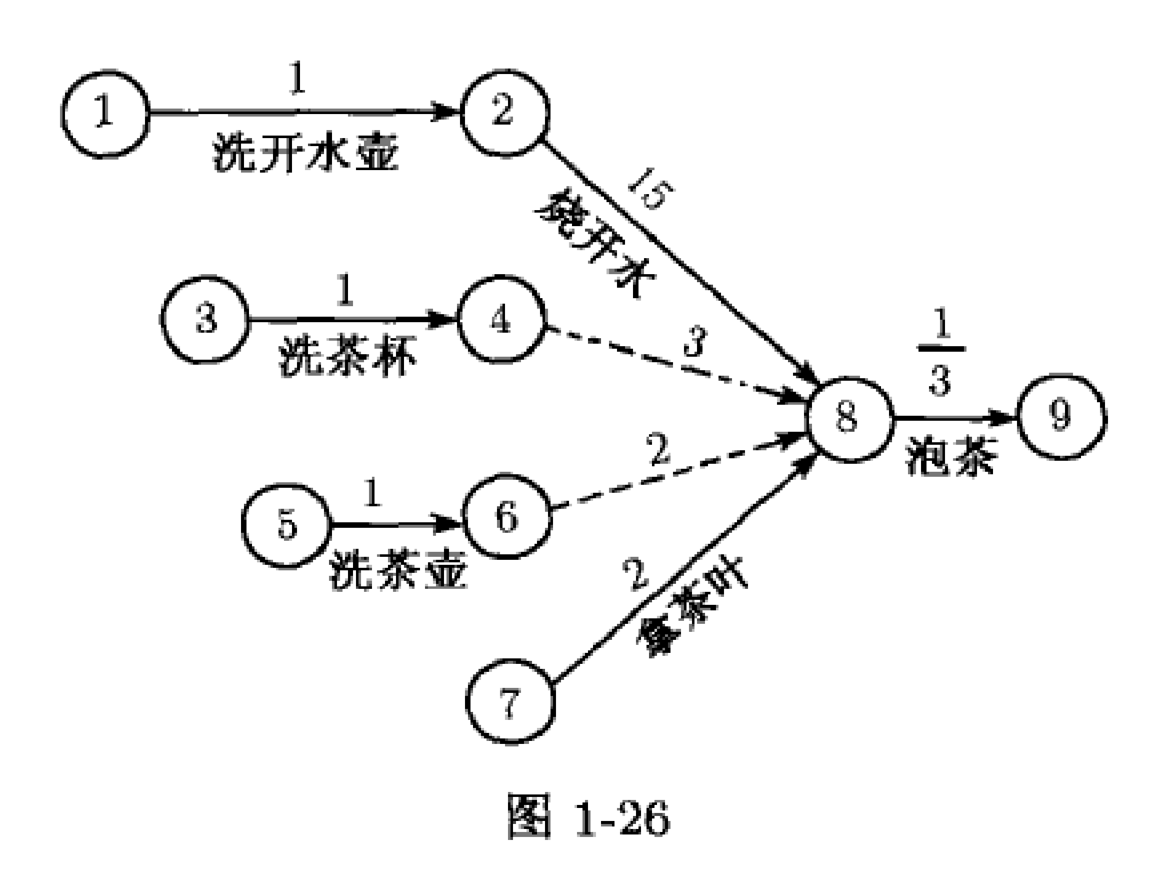


图 1-26

实际上的意义是洗完了茶杯后洗茶壶, 然后再拿茶叶 (不用虚线箭头也可).

§5 编　　号

在画图当中, 箭杆的长短是不必注意的事, 甚至于把箭杆画弯了也无关系 (如果在图上加时间坐标, 就另当别论, 在此不拟多讲), 箭杆有时也会交叉, 为了清楚起见, 可以画一“暗桥”.

原则上讲编号可以任意, 并无关系, 但为了计算方便起见, 我们最好采取由“小”到“大”的原则顺序编号, 箭尾的号比箭头的小. 同时考虑到将一个任务分成几个任务的可能性, 还应当留有余号, 在上节的图 1-8 变为图 1-9, 我们就得重新编号; 而图 1-4 因为留有余地, 我们只要局部改动就得出图 1-15 了.

§6 算　时　差

在讲主要矛盾线的时候已经讲过, 统筹方法可以找出主要矛盾线来, 同时也可以看到非主要矛盾线上的项目是有潜力可挖的. 潜力到底有多大? 这将是本节所要说明的问题.

从这个较简单的箭头图 (图 1-27) 来看, 它的主要矛盾线是:

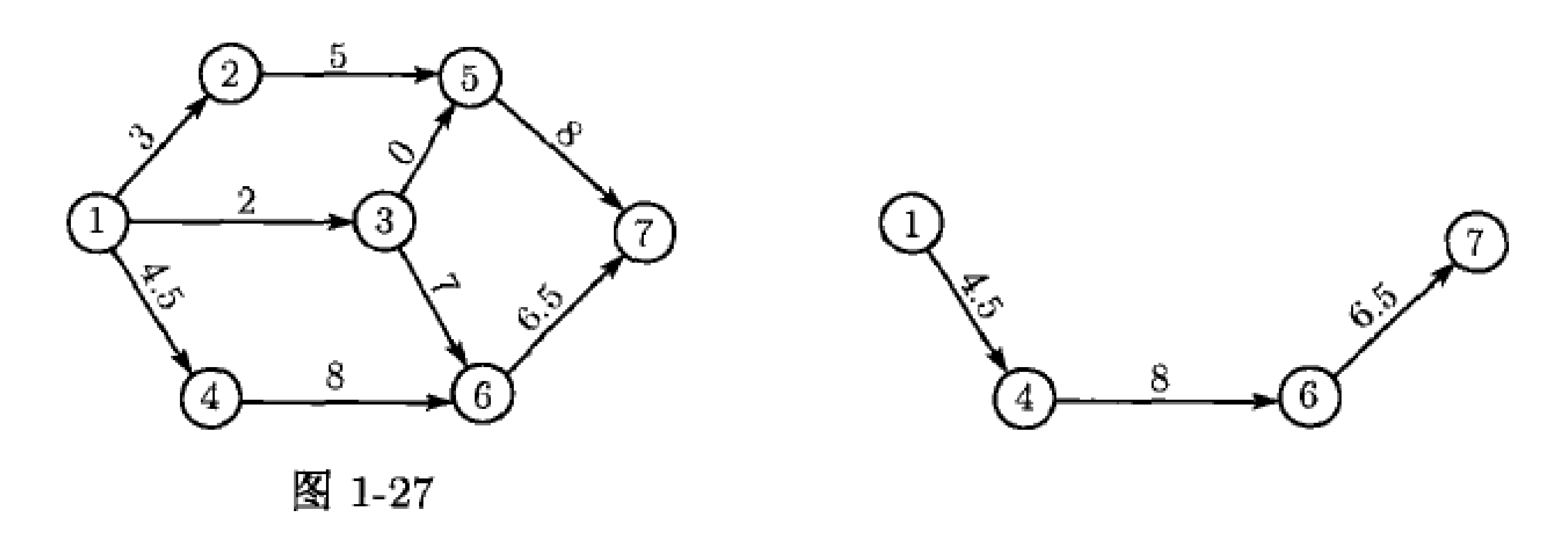


图 1-27

共需时间 4.5+8+6.5=19(周).

我们先算每一任务最早可能开工日期, 用 □ 表示之. 它的算法如下: 从起始点到某一任务, 可能有许多条路线, 每条路线有一个时间和, 这些时间和中, 必有一个最大值, 这个最大值就是该任务的最早可能开工日期. 例如由①到⑥有两条路线 2+7=9, 4.5+8=12.5. 因此⑥ → ⑦线下写 [12.5]. 把话讲得更确切些: 如果一切按计划进行, 在 12.5 周内, 任务⑥ → ⑦的开工条件是不具备的, 而最早可能开工时间是 12.5 周完结的时候.

再算出各任务的最迟必须开工日期, 用 △ 表之. 也就是说如果这个任务在 △ 形内所标时间之后开工, 就要影响整个生产进度了. 它的算法如下: 从终止点逆箭头到某一任务, 亦可能有许多条路线, 这些路线的时间和中, 也有一个最大值, 由主要矛盾线上的时间总和减去这个最大值, 再减去这一任务所需的时间, 就是这一任务

的最迟开工日期. 例如, 从终止点到③共有两条路线, 各需 8+0=8 周及 7+6.5=13.5 周, 其中 13.5 周较大, 而主要矛盾线时间总和是 19 周, 因此在任务① → ③线下写上△3.5 $(3.5 = 19 - 13.5 - 2)$.

把上面计算的结果都写在图上, 就得图 1-28.

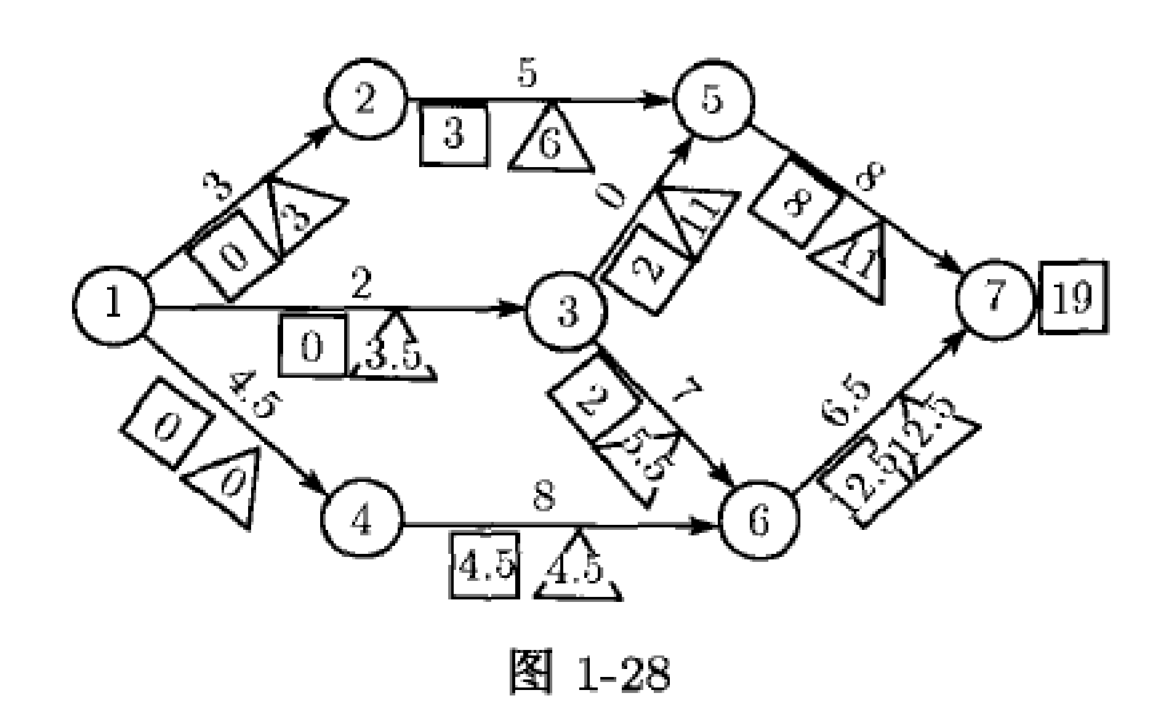


图 1-28

再赘一句, 对任务 (3-6) 来说: 由于它的上一任务还没完成, 它不可能在两周内开工. 但如果在 5.5 周后才开工, 就必然耽误整个进度. 在主要矛盾线上 □△ 内的数目一定相等. □△ 内数值差额愈大的任务, 愈有可以支援其他任务的潜力.

反向图: 把图 1-27 的所有箭头都倒转过来, 得下图

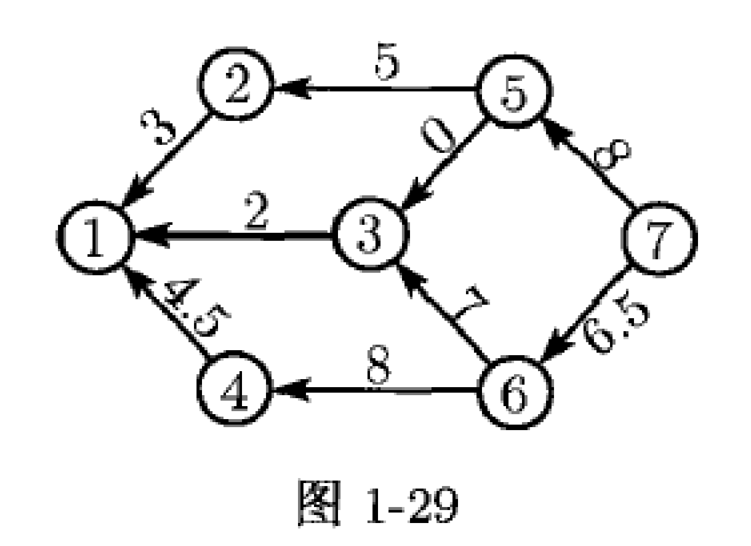


图 1-29

试算出反向图上各最早可能开工时间及最迟必须开工时间, 比较一下, 看看它们之间有什么关系. 不难看出顺向图的最早可能开工时间, 加上反向图的最迟必须开工时间, 再加上相应的工序时间等于 19; 同时顺向图的最迟必须开工时间, 加上反向图的最早可能开工时间, 再加上相应的工序时间也等于 19.

这是指领导没有给我们特别指示的情况下, 假设根据有关历史资料或对每项任务所需时间的经验估计, 所作出的图. 如果领导指示工程必须在 17 周内完成, 我们对 △ 内的数字就不能这样填, 就必须以 17 周为基数来进行反算. 于是① → ④、④ → ⑥、⑥ → ⑦处的时差都变为 −2. 因此, 我们必须采取措施, 来满足这一要求. 与此相反, 如果领导要求是 20 周完成, 则 △ 内的数字就依 20 周为基数, 进行反算, 于是时差都多了 1 周. 遇见这样情况, 我们就该机动地从节约角度来考虑问题, 酌量地减少劳动力并使其均衡, 或适当地减少设备.

注意 图 1-27 是作为练习提出的, 试想一下, 虚任务③ $\xrightarrow{0}$ ⑤的意义, 也就是图 1-27 的逻辑关系是否等价于图 1-30:

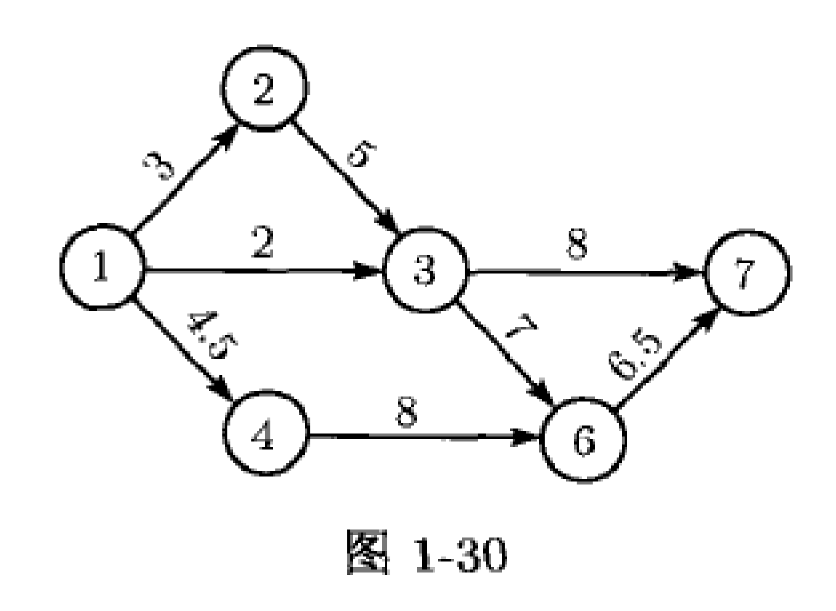


图 1-30

图 1-27 是双代号的, 利用

$(1-2)$	$(1-3)$	$(1-4)$	$(2-3)$	$(3-6)$	$(4-6)$	$(3-7)$	$(6-7)$	$(7-)$
A	B	C	D	F	G	H	I	J

可以把它变成为以下的单代号表示图:

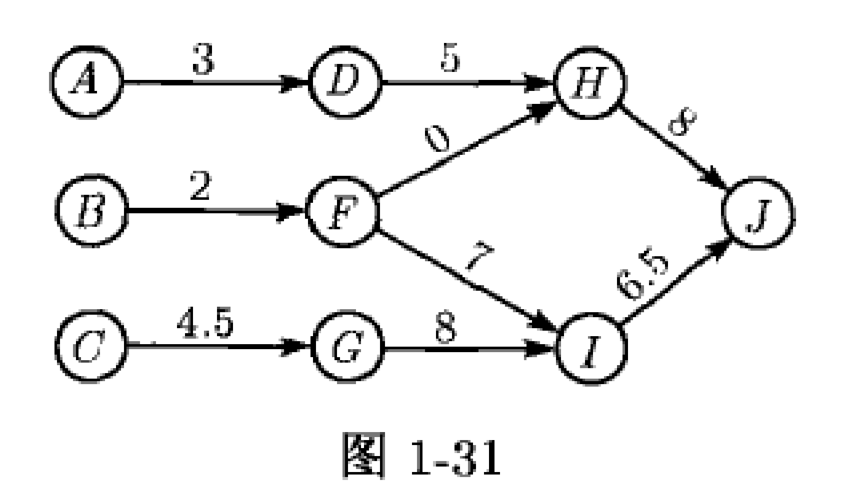


图 1-31

(图中Ⓐ、Ⓑ 、Ⓒ三项任务同时开始进行)

§7 算 法

对简单的情况说来, 线路是一目了然的. 但任务多了, 线路纷杂, 哪些已经算过了, 哪些还没有算过, 这就出现了既麻烦, 而又容易产生错误的情况. 那么, 怎样来避免错误, 避免漏算呢? 为此, 一套计算表格就产生出来了 (见表 1-1). 第一栏是工序代号, 依第一字 (箭尾号码) 的顺序由小到大排列, 如果第一字相同则依第二字 (箭头号码) 的顺序排列. 其余几栏依次是, 这一工序需要的时间 t_E、最早可能开工时间 T_E(也就是预计在这期间内不可能开工)、最迟必须开工时间 T_L(也就是按预计, 在这期间内不开工将影响整个工程进度) 及时差.

以 §6 图 1-27 为例, 我们可以列出表 1-1 的计算表格.

表 1-1 的第三栏 T_E 可以从表上由上而下地计算. 工序 (1-2)、(1-3)、(1-4) 的 $T_E=0$, 工序 (2-5) 的 T_E 等于 (1-2) 的 T_E 加 $t_E(=0+3=3)$. 工序 (3-5) 及 (3-6)

的 T_E 等于 (1-3) 的 T_E 加 $t_E(=0+2=2)$. 工序 (4-6) 的 T_E 等于 (1-4) 的 T_E 加 $t_E(=0+4.5=4.5)$. 工序 (5-7) 的 T_E 等于 (2-5) 及 (3-5) 中的 T_E 加 t_E 的较大者 (即 3+5=8, 0+2=2 中的较大者 8). (6-7) 的 T_E 等于 (3-6), (4-6) 中的 T_E 加 t_E 的较大者 (2+7=9,4.5+8=12.5, 较大者为 12.5). 而 7 的 T_E 由 (5-7), (6-7) 得来 (=19). 总的一句话, 本工序的 T_E 等于紧前工序的 T_E 加 t_E, 或紧前各工序的 T_E 加 t_E 中的较大者.

表 1-1

工序编号		本工序时间	开工时间		时差
箭尾号	箭头号	t_E	最早 T_E	最迟 T_L	$T_L - T_E$
1	2	3			
1	3	2			
1	4	4.5			
2	5	5			
3	5	0			
3	6	7			
4	6	8			
5	7	8			
6	7	6.5			
7					

表 1-1 第四栏 T_L 的算法, 是从下而上. 工序 (6-7) 的 $T_L(=19)$ 等于 7 的 T_L 减去 (6-7) 的 $t_E(19-6.5=12.5)$. 同样 (5-7) 的 T_L 等于 7 的 T_L 减去 (5-7) 的 $t_E(19-8=11)$. (4-6) 的 T_L 等于 (6-7) 的 T_L 减去 (4-6) 的 $t_E(12.5-8=4.5)$. (3-6) 的 T_L 等于 (5-7)T_L 减 (3-5) 的 $t_E(11-0=11)$. 总的一句话, 本工序的 T_L 等于紧后工序的 T_L 减去本工序 t_E, 或紧后各工序 T_L 中的最小者减去本工序的 t_E.

将以上计算结果填入表内, 再在第五栏填入相应的 T_L 减 T_E 的值, 即得表 1-2.

表 1-2

工序编号		本工序时间	开工时间		时差
箭尾号	箭头号	t_E	最早 T_E	最迟 T_L	$T_L - T_E$
1	2	3.0	0	3.0	3.0
1	3	2.0	0	3.5	3.5
1	4	4.5	0	0	0
2	5	5.0	3.0	6.0	3.0
3	5	0	2.0	11.0	9.0
3	6	7.0	2.0	5.5	3.5
4	6	8.0	4.5	4.5	0
5	7	8.0	8.0	11.0	3.0
6	7	6.5	12.5	12.5	0
7			19.0	19.0	0

在图上将时差为“0”的各工序, 用红线 (或粗线) 连起来, 即为主要矛盾线. 对熟练的人来说, 不必用表格计算, 只要逐步比较, 就可以很快地找出主要矛盾线来.

例如: 在图 1-27 中, 首先将① → ④ → ⑥与① → ③ → ⑥比较, ① → ④ → ⑥的时间长, 就可把③ → ⑥甩掉, 再比① → ③ → ⑤与① → ② → ⑤, 可甩掉① → ③ → ⑤, 这样, 只剩下两条线① → ④ → ⑥ → ⑦、① → ② → ⑤ → ⑦, 两者比较, 立刻可以找出① → ④ → ⑥ → ⑦为主要矛盾线.

例题: 试用对比法找出下图的主要矛盾线.

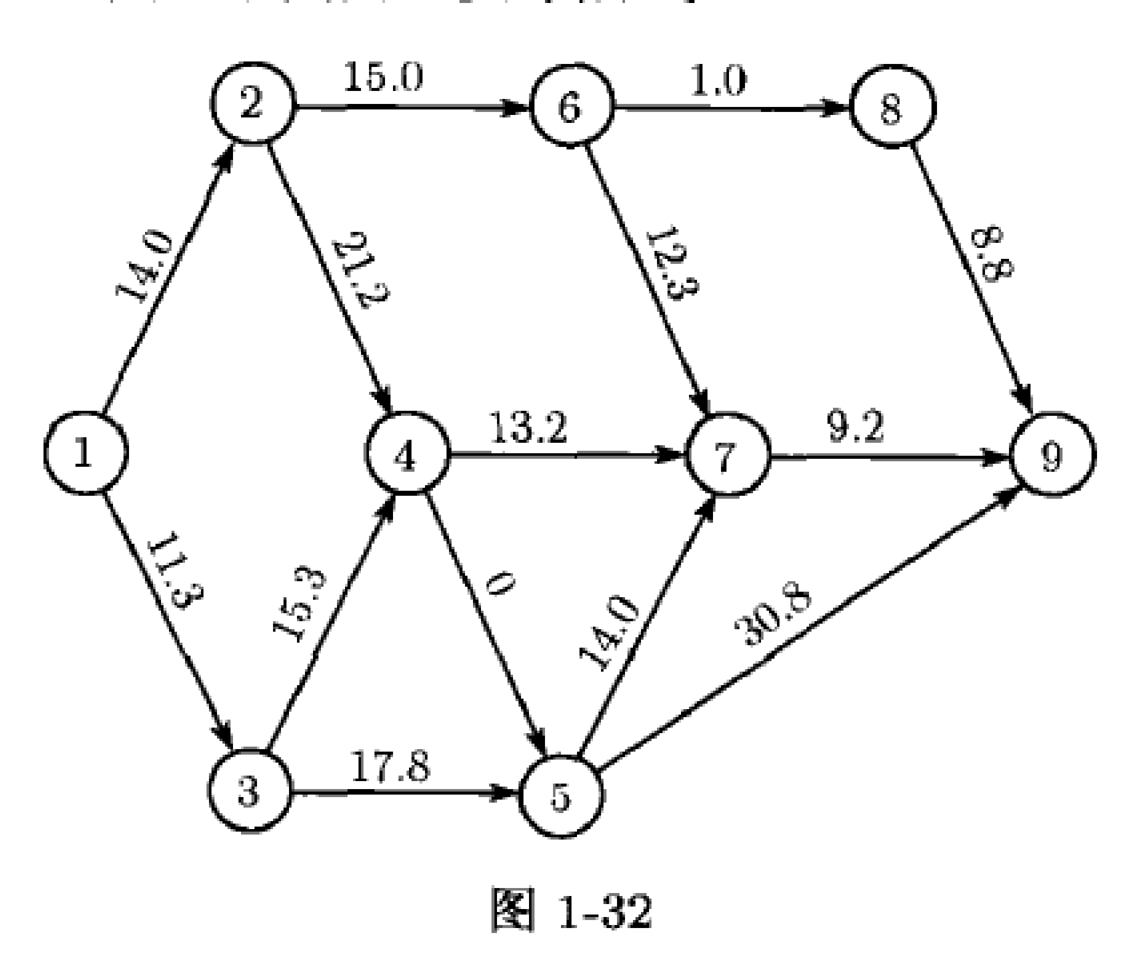


图 1-32

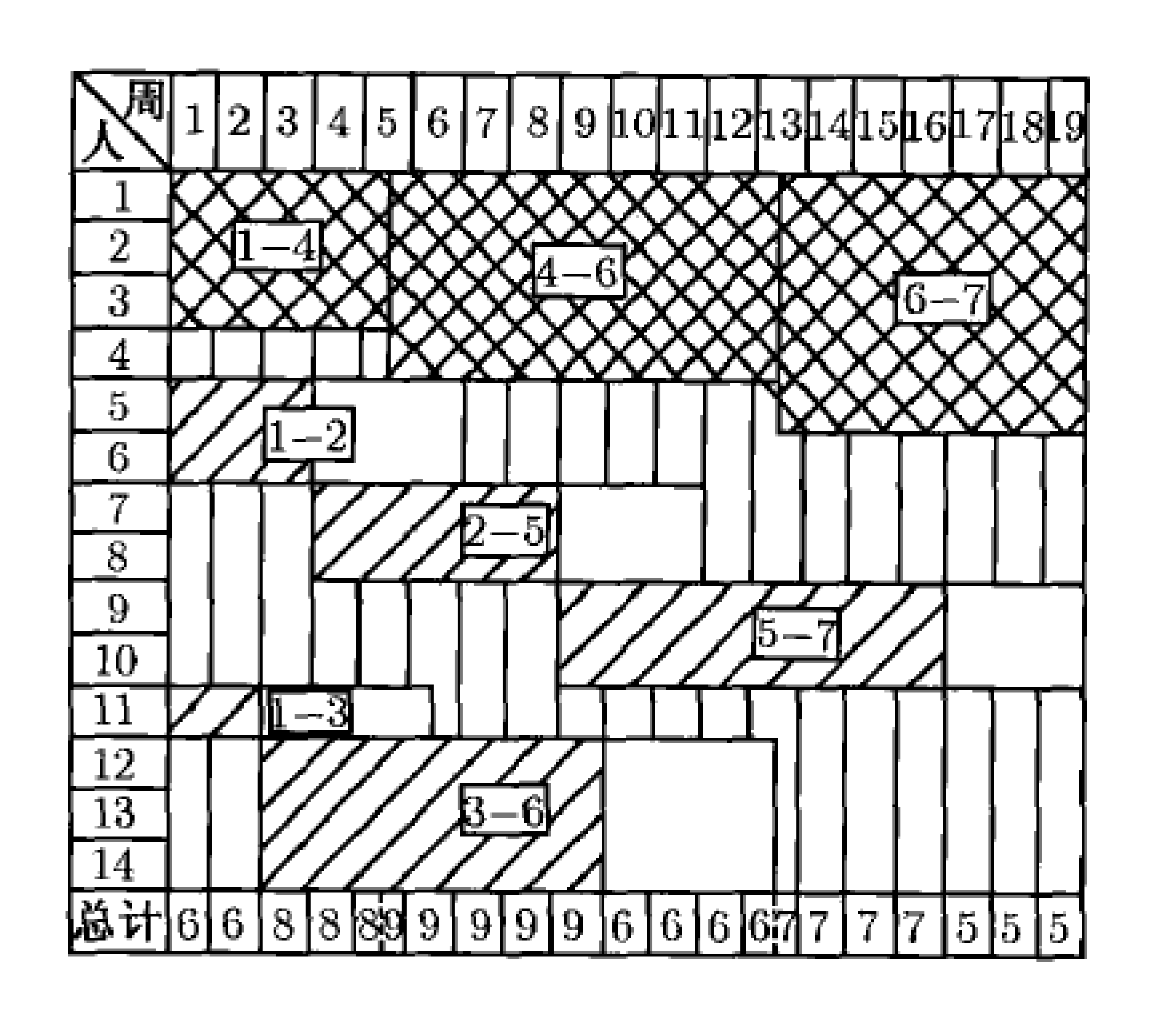
先比⑥ → ⑧ → ⑨、⑥ → ⑦ → ⑨, 甩掉前者, 再甩② → ⑥ → ⑦, 再甩④ → ⑦、⑤ → ⑦ → ⑨, 再甩③ → ④, 最后甩① → ③ → ⑤, 因此, 得出主要矛盾线① → ② → ④ → ⑤ → ⑨.

§8 原材料、人力、设备与投资

在作出流线图并定出主要矛盾线之后, 就必须根据各项任务所需要的原材料、人力、设备与资金作出日程上的安排. 例如: 任务 (4-6) 所需要的原材料必须在第 4.5 周送到, 各种人员也必须及时到达工作岗位. 委托其他单位代加工的半成品, 在订合同时也必须以此为根据. 如果知道不能按时交货, 应当修改流线图.

以人力为例, 首先做出表格, 然后计算出什么时候, 所需某种技工的人数. 例如第一周任务 (1-2) 需要甲种工二人, 乙种工五人; 任务 (1-3) 需要甲种工一人; 任务 (1-4) 需要甲种工三人, 乙种工二人. 在第一周总共需要甲种工六人, 乙种工七人. 用以下的表格来表明甲种工的需要情况.

表 1-3 中网线表明主要矛盾线上的情况, 3-6 的一块, 表明从第三周到第九周, 每周需要三个甲种工, 而总数表示第一周需六个, 第二周需六个, …… 而第五周上半周要八个, 下半周要九个.



从这个图上也可以看出一些问题：首先，所需总人数是否超出可能性，如果超出，我们必须事先调整，或采取其他措施；其次，能否安排得均匀些.

例如，在任务 (2-5) 完成后停工 3 周，而任务 (3-6) 从第 4.5 周开始减为两个甲种工，延长 (3-6) 的完成时间，这样整个任务就有可能在 8 个甲种工的条件下进行了.

请读者试用这样的改动，作出一个箭头图来，看看七个甲种工能不能如期完成任务？

对于多种产品生产 (即多个目标) 问题，这种安排就更为重要了. 处理的方法是：对每一个目标做一个流线图 (也可以将若干个目标表示在一个流线图上)，对每一个流线图列出各种人员的需要表，把各表上的某种人员总计数加起来，这样就可以看出在现有的人力范围内是否能够完成. 如果超出限度，我们就要研究如何错开，如何延长，才能达到最经济最合理. 说来简单，但多种产品的生产是很复杂的，必须根据实际情况才能摸索出较好的方法来.

以上所讲的是人力问题，实质上也可以用来处理设备问题，如果每个车床都有专人负责，则设备限制的问题就和人力限制的问题统一起来了. 例如我们可以按刨床、车床、磨床、铣床列表处理.

关于原材料问题，由于有了流线图，可以把进料时间扣得更紧些. 原材料过多过早的储存，不但积压资金，多占仓库面积，增加自然损耗等，而且最终必然导致影响社会主义建设扩大再生产的进度. 有了统筹方法，就有可能扣得更紧些. 有时，我们甘愿冒几分停工待料的风险，也比储料过多更上算，对整个经济的发展可能更有利些.

投资问题这儿就不多谈了.

更复杂的问题这儿也不多谈了. 总的一句话，这是一个新兴的方法，一切还待

创造、改进和完善, 特别重要的是在社会主义建设的实践中, 不断地作具体的修改与补充.

§9 横 道 图

根据上节的甲种工人配备表, 可以画成以下的工程界所熟知的横道图 (即 L. H. Gantt 图, 又称条形图), 见图 1-33.

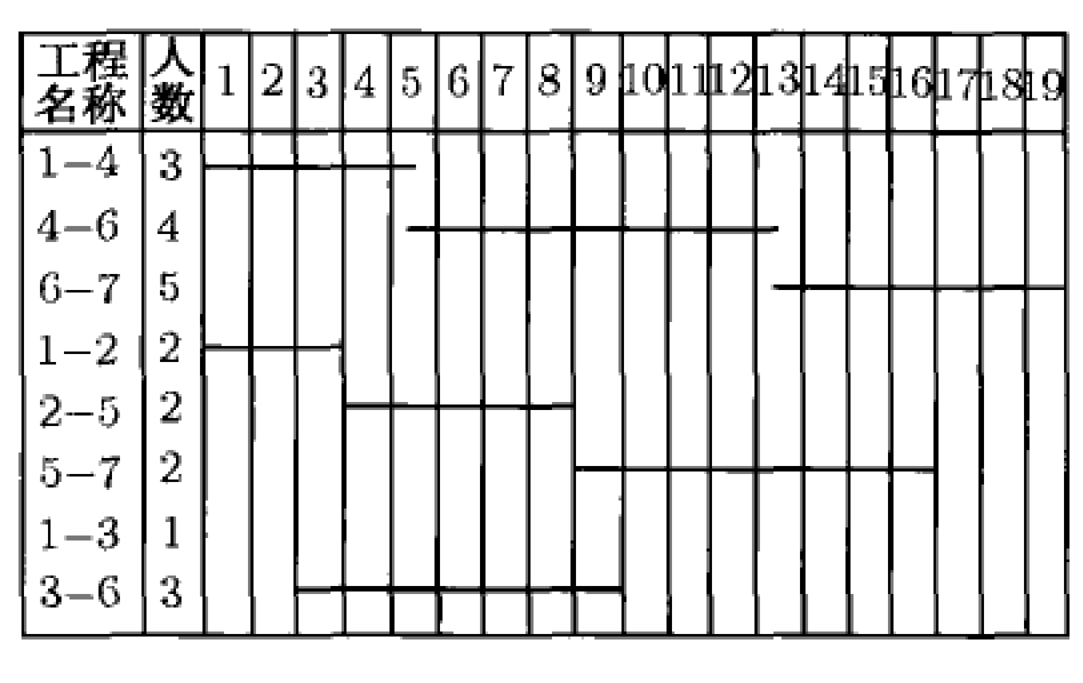


图 1-33

可以根据箭头图得出的合理方案, 画出横道图来, 但切不要从横道图出发来搞箭头图, 因为横道图略去了箭头图上的若干特点, 有如行政区域图上没有等高线, 我们看不出地面的起伏来.

箭头图实质上交待了不少“横道图”为什么这样画的道理.

如图用箭杆的投影长度表周数, 虚线表空余时间, 则我们有时也可以把横道图的优点统一到箭头图中来. 图 1-34 就是按图 1-31 画成的. 由 F 到 I 的箭头投影长度是 10.5, 但其中的实线部分是 7, 表明需要实际工作时间为 7 周. 为了避免工序 F 与工序 C 使用的人力发生矛盾, 可以把 F 的 3 ~ 4.5 周的一段画成虚线“……”, 把实线部分移后 2.5 格.

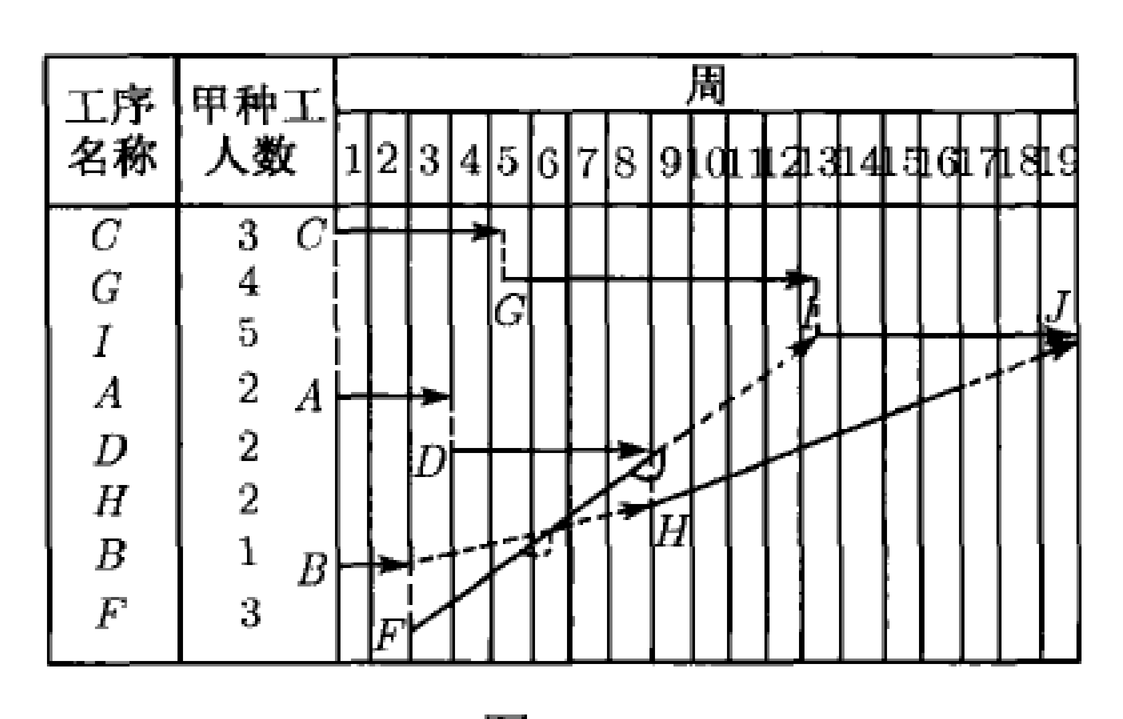


图 1-34

在不太复杂的工程中, 把箭头图画在时间坐标上是有好处的 (参考附图 1), 实践中已经出现了不少例子. 把各主要工种所需要的人数 (以及设备、原材料、资金) 都按日地排在一个表上, 这样更易于综观全貌.

§10 练 习 题

1. 利用下表的资料画出箭头图来:

表 1-4

任 务	紧 前	紧 后
A	无	B,C,G
B	A	D,E
C	A	H
D	B	H
E	B	F,I
F	E	J
G	A	J
H	D,C	J
I	E	K
J	F,G,H	K
K	I,J	无

任务 A 表示 $\xrightarrow{A}$, 在 ○ 内填上号码. 读者思考一下, 如果仅知道"紧前"(或"紧后")一栏是否已足够画出图来? 合适的安排是使箭杆不出现交点.

这是双代号法的图形, 再试做出单代号法的图形.

2. 利用表 1-5 资料画出箭头图来:

表 1-5

任 务	紧 前	任 务	紧 前
U	A,B,C	N	S
A	L,P	P	T
B	M,Q	Q	T
C	N,R	R	T
L	S	S	V
M	S	T	V

画出的箭杆可能相交, 试回答, 能否画出一个箭杆不相交的箭头图来?

3. 算出图 1-6 的时差.

附记

1. 如果一个计划是由若干分计划所合成的, 而分计划与分计划之间的公共点不多, 可以分别制订计划, 然后再合并一起, 统一安排.

2. 不要把箭头图看得太简单了, 实际的困难在于找到各工序之间的正确关系(如混凝土的浇灌, 必须在建立模板之后). 但也有不少不太确切的工序名称, 因而在做箭头图前, 必须先从群众中来. 让大家说明他们所担负的各任务与其他任务的关系, 并提出意见和建议. 图做好后, 还必须到群众中去, 由群众审查是否有漏列情况.

3. 在这儿, 我们写下练习题 1 的解, 供参考.

双代号的图形是

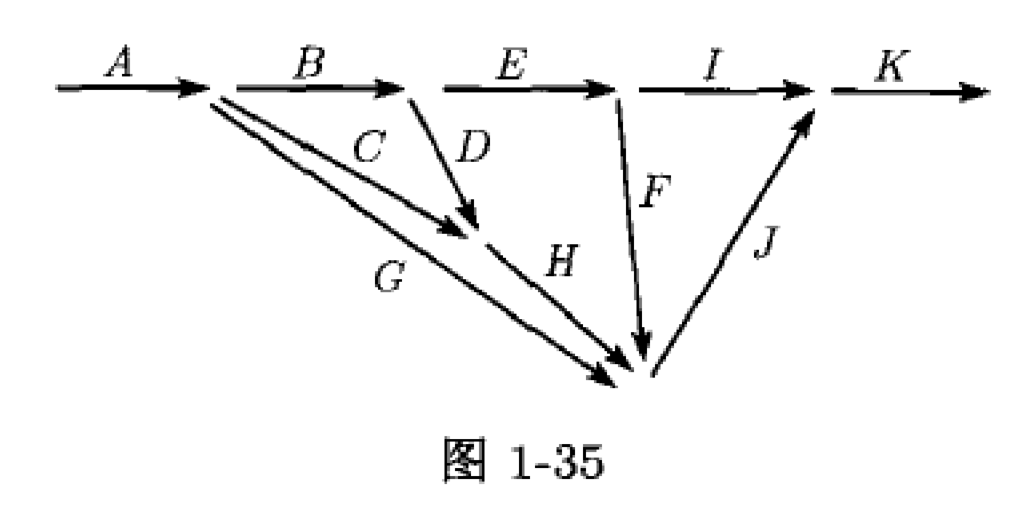


图 1-35

单代号的图形是

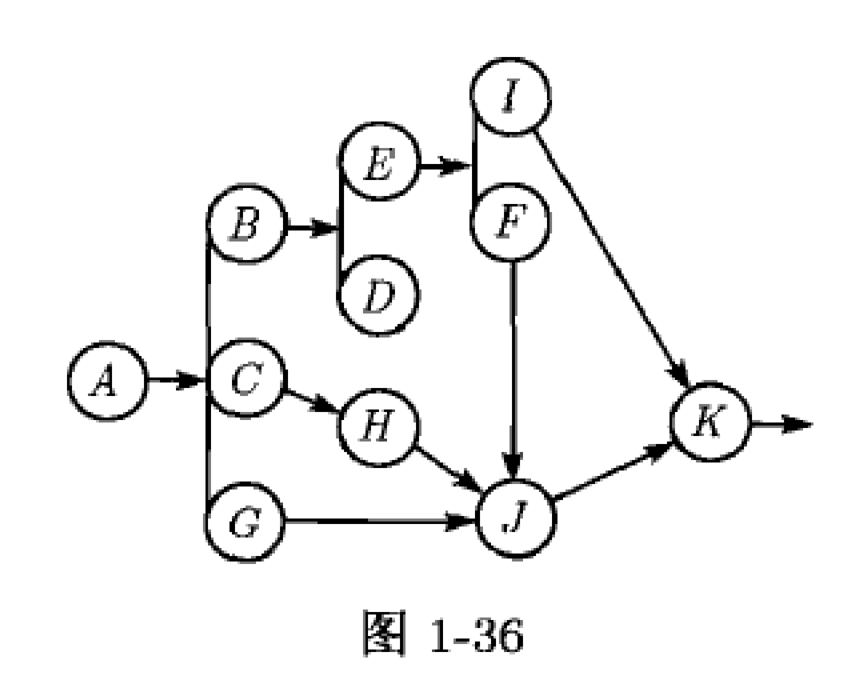


图 1-36

二 非 肯 定 型

§11 化非肯定型为肯定型

在计划中每个环节能够确切不差地如期完成的情况, 毕竟是少数. 由于一些预见不到的因素, 总有或多或少的时间变化, 因而一般讲来, 非肯定型的问题是更常见的. 为了读者容易理解, 我们先介绍了肯定型的问题, 这不仅是因为肯定型也有用, 而更主要的是因为它也是进一步处理非肯定的基础.

每一任务的完成时间拿不稳, 怎么办? 是否我们的方法就无能为力了? 不, 这正是我们的方法的好处所在. 我们能够从成千上万个不太肯定的环节中, 找出最终

完成的可能性规律来.

$$\textcircled{4}\xrightarrow[8]{6-7-14}\textcircled{6}$$

与其向负责某一项具体任务的单位, 要一个靠不住的“确切”的完成任务所需要的时间, 还不如请他对完成这一任务提出三个时间, 即: 一个最乐观的估计时间, 一个最保守的估计时间和一个最大可能完成的估计时间. 例如, 任务 (4-6) 在一切条件顺利时, 需要 6 周完成; 在最困难的情况下 14 周可以完成. 据估计看来最可能 7 周完成. 我们用来表示, 箭杆下的数值表示“平均”周数. 这个数值的算法是:

$$\frac{1}{6}(6+4\times 7+14)=8$$

一般的计算公式是, 最乐观的估计加上最保守的估计, 再加上最可能的估计的 4 倍, 然后除以 6. 就这样把一个非肯定型的问题转化为肯定型的问题来处理. 例如图 2-1.

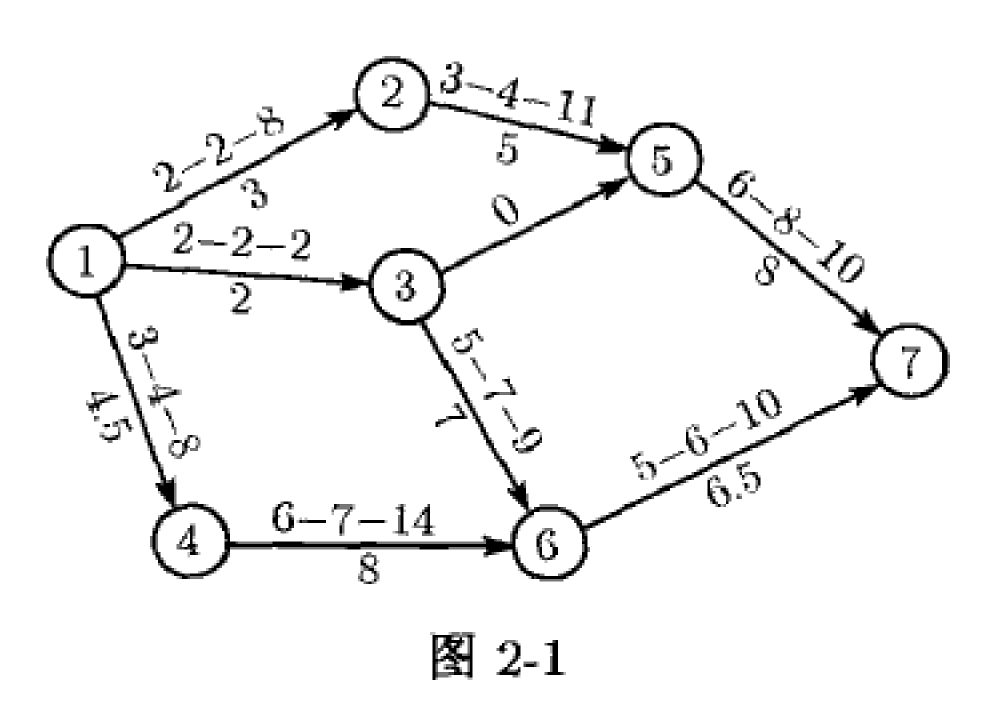


图 2-1

这样把不肯定型化成为肯定型之后, 就是 §6 中处理过的问题. 在 §6 中算出来的总完成日期是 19 周.

也许读者会说: 一个裁缝一把尺, 估计任务 (6-7) 的和估计任务 (3-6) 的水平不一定相同, 但这是关系不大的, 众人估计, 算在一起, 实际上还就是一个估计, 用概率的观点来衡量估计, 偏差不可免, 但趋向总是有明显的参考价值的. 当然, 这并不排斥每个估计都尽力做到可能精确的程度.

请注意, 用估算得出来的完成日期 (19 周), 仅是一个可能的完成日期, 确切地说, 在这个日期前完成全部工作的可能性大约是 50%, 用些统计工具可以获得在多少周到多少周之间完成的可能性在 95% 以上, 等等.

§12 平均值与方差

以上所讲的是求平均数的一种方法, 我们并不排斥其他方法, 或估计方法. 但最好还是在工作中全部地对比式地记录下来, 作为科学实验的数据. 就这样不断对

比, 不断提高来改进设计计划水平. 特别对有较多经验的工序, 例如已做了十几次, 各有数据, 那我们就不妨取这些数据的平均数.

我们现在重复叙述一下, 上节所用到的求“平均数”法.

如果估出是乐观是 a 周 (或记为 t_o) 最保守是 b 周 (或记为 t_p). 最可能是 c 周 (或记为 t_m), 我们取

$$\frac{a+4c+b}{6}$$

作为平均数并且以

$$\left(\frac{b-a}{6}\right)^2$$

作为方差 (为什么这样做, 以后再讨论).

例如: 沿主要矛盾线 (1-4), (4-6), (6-7) 的平均数及方差各为:

表 2-1

任　务	(1-4)	(4-6)	(6-7)	总　和
平均数	4.5	8	6.5	19
方　差	$\left(\frac{8-3}{6}\right)^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2$	$\left(\frac{14-6}{6}\right)^2 = \left(\frac{8}{6}\right)^2$	$\left(\frac{10-5}{6}\right)^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2$	$\frac{114}{36}$

我们说主要矛盾线上各工序完成的总日数的平均数是 $M=19$ 周, 而总方差是 $\frac{114}{36}$. $\frac{114}{36}$ 的平方根: $\sigma=\sqrt{\frac{114}{36}}=1.8$, 这是总完成日数的标准离差. 假定总完成日数是一个以 M 为均值 σ 为标准离差的正态分布, 则可以由之而估出在某一期限之前完成的可能性, 例如在

$$M+2\sigma=19+2\times 1.8=22.6(\text{周})$$

前完成的可能性是 98%, 在

$$M+\sigma=19+1.8=20.8(\text{周})$$

前完成的可能性是 84%.

现在又添了不少“为什么”. 例如: 为什么总完成日期是一个正态分布? 为什么在 $M+2\sigma$ 之前完成的可能性是 98%? 等等. 这些问题的回答, 必须要用些概率论的知识, 而在国外有些文献中, 似乎用得不妥. 我们在后面将指出其不妥处, 并且希望数学工作者能够进行些理论的探讨.

我现在先暂且不讨论为什么, 而在 §13 ~ 15 中将叙述怎样来计算的方法, 学会了之后就先用. §16 ~ 19 可以暂且不看.

§13 可能性表

在 $M+\lambda\sigma$ 之前完成的可能性以 $p(\lambda)$ 表之, 则有以下的表 (正态分布).

表 2-2

λ	$p(\lambda)$	λ	$p(\lambda)$
−0.0	0.50	0.0	0.50
−0.1	0.46	0.1	0.54
−0.2	0.42	0.2	0.58
−0.3	0.38	0.3	0.62
−0.4	0.34	0.4	0.66
−0.5	0.31	0.5	0.69
−0.6	0.27	0.6	0.73
−0.7	0.24	0.7	0.76
−0.8	0.21	0.8	0.79
−0.9	0.18	0.9	0.82
−1.0	0.16	1.0	0.84
−1.1	0.14	1.1	0.86
−1.2	0.12	1.2	0.88
−1.3	0.10	1.3	0.90
−1.4	0.08	1.4	0.92
−1.5	0.07	1.5	0.93
−1.6	0.05	1.6	0.95
−1.7	0.04	1.7	0.96
−1.8	0.04	1.8	0.96
−1.9	0.03	1.9	0.97
−2.0	0.02	2.0	0.98
−2.1	0.02	2.1	0.98
−2.2	0.01	2.2	0.99
−2.3	0.01	2.3	0.99
−2.4	0.01	2.4	0.99
−2.5	0.01	2.5	0.99

在上节例中的百分比, 就是这样查表查出来的.

如果问二十周 (或二十六周前) 完成的可能性, 可以从

$$M+\lambda\sigma=20$$

即

$$19+1.8\lambda=20$$

中算出

$$\lambda=\frac{1}{1.8}=0.56$$

查表可知有 70% 的把握 (准一位小数).

我们在讲些"所以然"之前, 先算一个例子, 对急用先学, 边学边用的同志来说, 从这个例子学会了应用, 最为重要. 后面看不懂的部分将来再说.

§14 例　子

问题. 我们有一计划, 其中各任务间的关系和数据如图 2-2, 问 90 周内完成的可能性有多少?

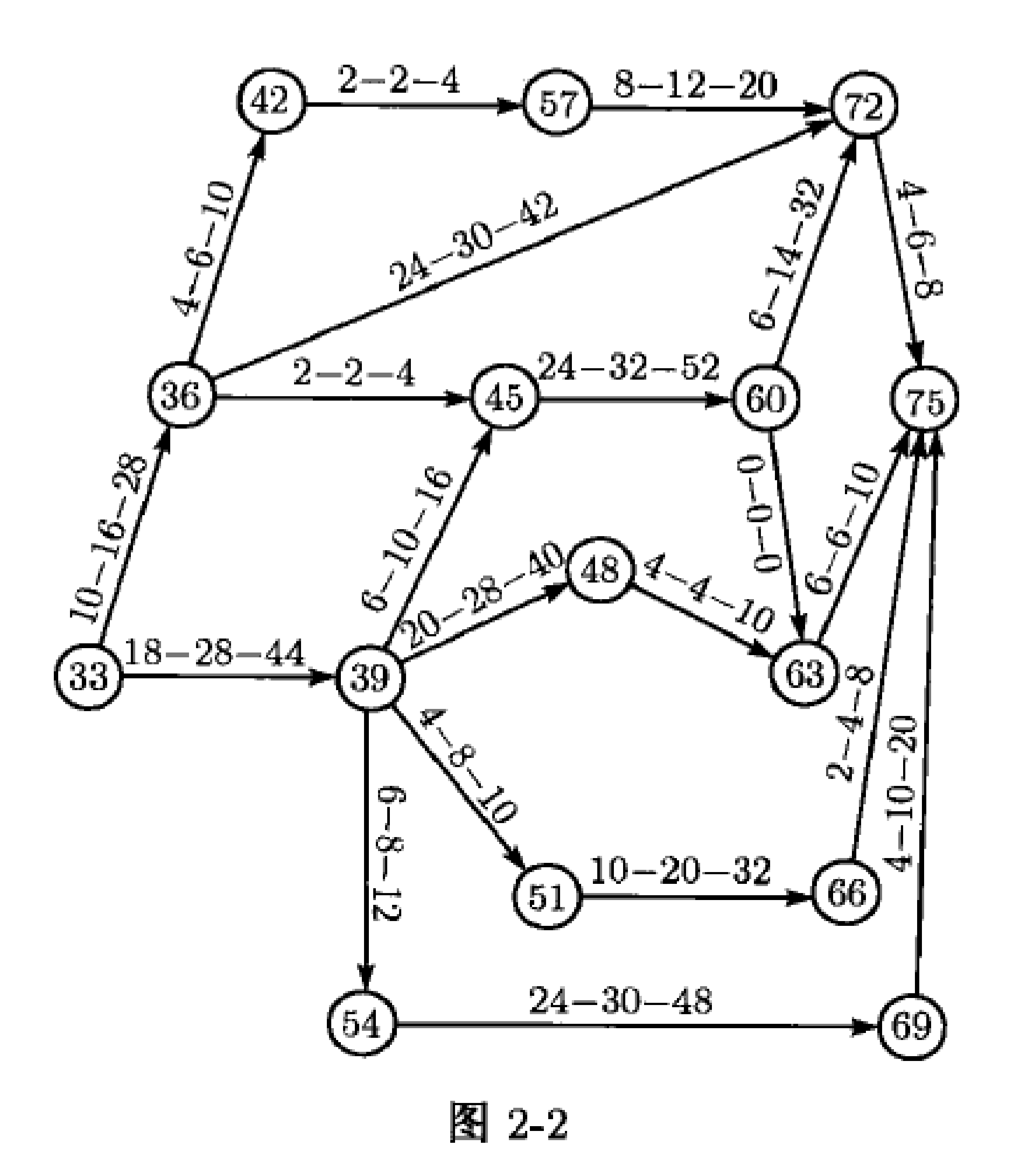


图 2-2

解答:

第一步算出最早可能、最迟必须完成时间与时差. 我们用以下的手算工作表进行. 首先将任务依第一字的顺序由小到大排列, 如果第一字相同则依第二字的顺序由小到大排列, 然后写下最短、最可能、最长三个估计的时间, 写好后如表 2-3.

先用

$$t_E = \frac{t_0 + 4t_m + t_p}{6}$$

来算出平均时间, 填入第五栏, 这样就变为肯定型的情况了.

第二步用处理肯定型的办法算出最早可能完成时间 T_E.

第三步现在已经有了预先给定的完成时间 90 周, 因而是从 90 周中减起算出 T_L 的数值来 (与肯定型稍有不同).

第四步还是由 $T_L - T_E$ 求时差, 但注意时差可能出现负数了 (这就是为什么不称为"富裕时间"的道理). 最小负数的箭杆形成主要矛盾线, 经过这样算得出的结果见表 2-4.

手算工作表　表 2-3

工序编号		时间				开工时间		时差
箭尾号	箭头号	最短 t_o	最可能 t_m	最长 t_p	平均 t_E	最早 T_E	最迟 T_L	$T_L - T_E$
33	36	10	16	28				
33	39	18	28	44				
36	42	4	6	10				
36	45	2	2	4				
36	72	24	30	42				
39	45	6	10	16				
39	48	20	28	40				
39	51	4	8	10				
39	54	6	8	12				
42	57	2	2	4				
45	60	24	32	52				
48	63	4	4	10				
51	66	10	20	32				
54	69	24	30	48				
57	72	8	12	20				
60	63	0	0	0				
60	72	6	14	32				
63	75	6	6	10				
66	75	2	4	8				
69	75	4	10	20				
72	75	4	6	8				
75								

手算工作表　表 2-4

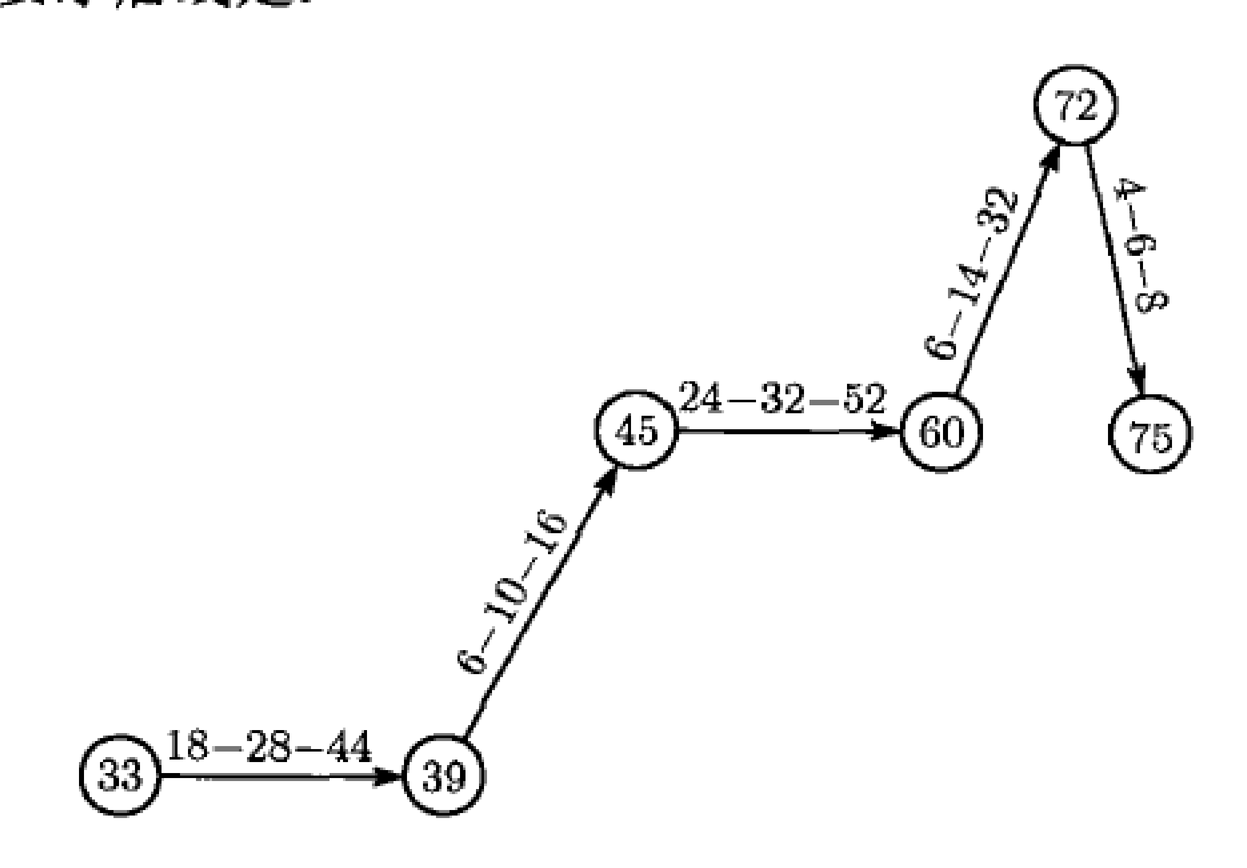
工序编号		时间				开工时间		时差
箭尾号	箭头号	最短 t_o	最可能 t_m	最长 t_p	平均 t_E	最早 T_E	最迟 T_L	$T_L - T_E$
33	36	10	16	28	17.0	0	15.0	15.0
33	39	18	28	44	29.0	0	−5.0	−5.0
36	42	4	6	10	6.3	17.0	62.7	45.7
36	45	2	2	4	2.3	17.0	32.0	15.0
36	72	24	30	42	31.0	17.0	53.0	36.0
39	45	6	10	16	10.3	29.0	24.0	5.0
39	48	20	28	40	28.7	29.0	49.6	20.6
39	51	4	8	10	7.7	29.0	57.7	28.7

续表

工序编号		时间				开工时间		时差
箭尾号	箭头号	最短 t_o	最可能 t_m	最长 t_p	平均 t_E	最早 T_E	最迟 T_L	$T_L - T_E$
39	54	6	8	12	8.3	29.0	39.0	10.0
42	57	2	2	4	2.3	23.3	69.0	45.7
45	60	24	32	52	34.0	39.3	34.3	−5.0
48	63	4	4	10	5.0	57.7	78.3	20.6
51	66	10	20	32	20.3	36.7	65.4	28.7
54	69	24	30	48	32.0	37.3	47.3	10.0
57	72	8	12	20	12.7	25.6	71.3	45.7
60	63	0	0	0	0	73.3	83.3	10.0
60	72	6	14	32	15.7	73.3	68.3	−5.0
63	75	6	6	10	6.7	73.3	83.3	10.0
66	75	2	4	8	4.3	57.0	85.7	28.7
69	75	4	10	20	10.7	69.3	79.3	10.0
72	75	4	6	8	6.0	89.0	84.0	−5.0
75						95.0	90.0	−5.0

附注：有时用手算工作表, 并不比图上算来得快些.

由此可见主要矛盾线是:



再用表 2-5 算出主要矛盾线上的方差.

因此标准离差

$$\lambda = \sqrt{\frac{2252}{36}} \doteq \sqrt{62.5556} \doteq 7.91$$

总的平均周数已经在表 2-4 中算出等于 95.

因此求

$$95 + 7.91\lambda = 90$$

即得

$$\lambda = \frac{-5}{7.91} \doteq -0.63$$

查 §13 的表 2-2 得出可能性是 26%.

表 2-5

工序编号		t_0	t_p	$t_p - t_0$	$(t_p - t_0)^2$
箭尾号	箭头号				
33	39	18	44	26	676
39	45	6	16	10	100
45	60	24	52	28	784
60	72	6	32	26	676
72	75	4	8	4	16
		总计			2252

总括一句：这个工程 90 周内完工的可能性只有 26%，四次里面可能有一次成功，三次失败.

放长期限到 100 周，由

$$95 + 7.91\lambda = 100$$

解出

$$\lambda = \frac{5}{7.91} \doteq 0.63$$

查表 2-2 得出可能性为 74%，成功的可能性四次里面可能有三次了.

附记 用肯定型的办法来画主要矛盾线对吗？我们暂且如此用，在 §16 有更好的办法来处理这个问题，在那里我们考虑了潜在发展的可能性.

我们想指出，对每一任务都用最保守的估计，因而可以算出整个工程最保守的估计，这样可以心中有底，知道在某一日期前定能完成. 同样我们都用最乐观的估计，也可以算出整个工程的最乐观估计，这样可以知道完成任务所需的最短时间. 如果这两种方法所得出来的主要矛盾线是同一的，那就不一定要用概率方法来决定主要矛盾线了.

§15 练 习 题

1. 纠正图 2-3 上至少存在的六个错误.

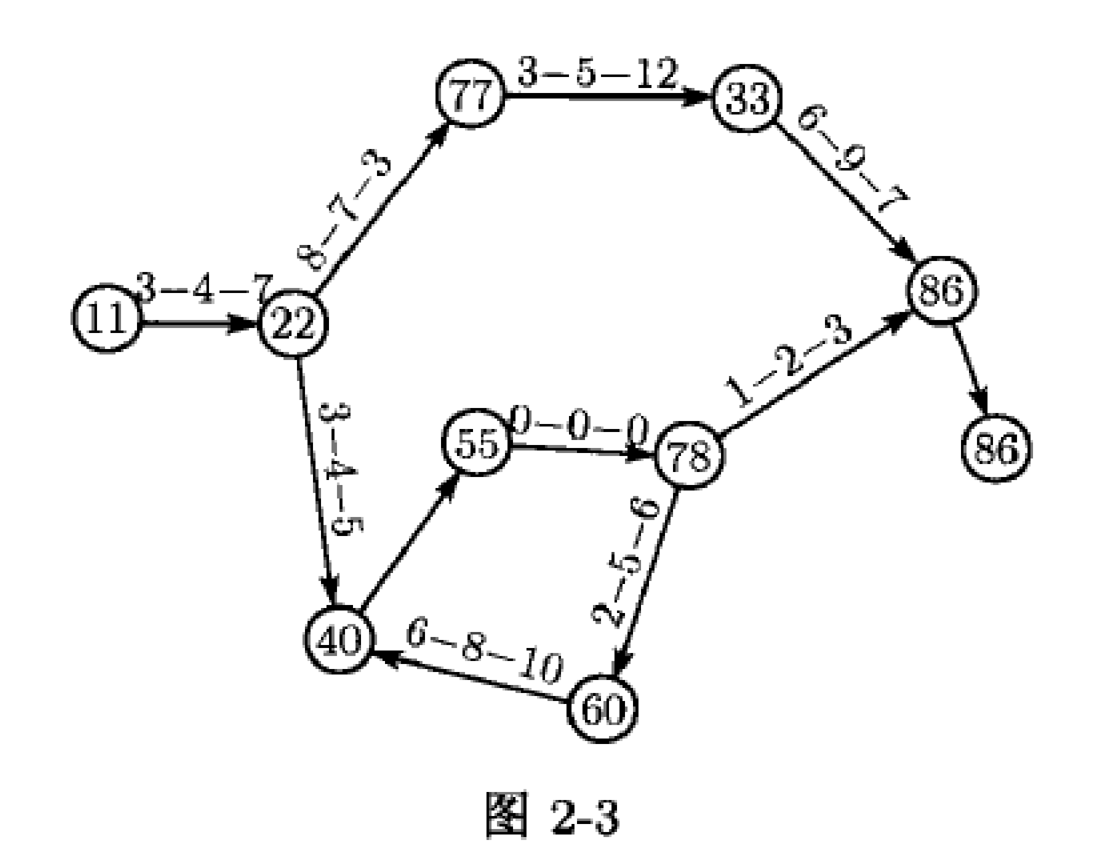


图 2-3

2. 用手算工作表处理图 2-4 并算出主要矛盾线.

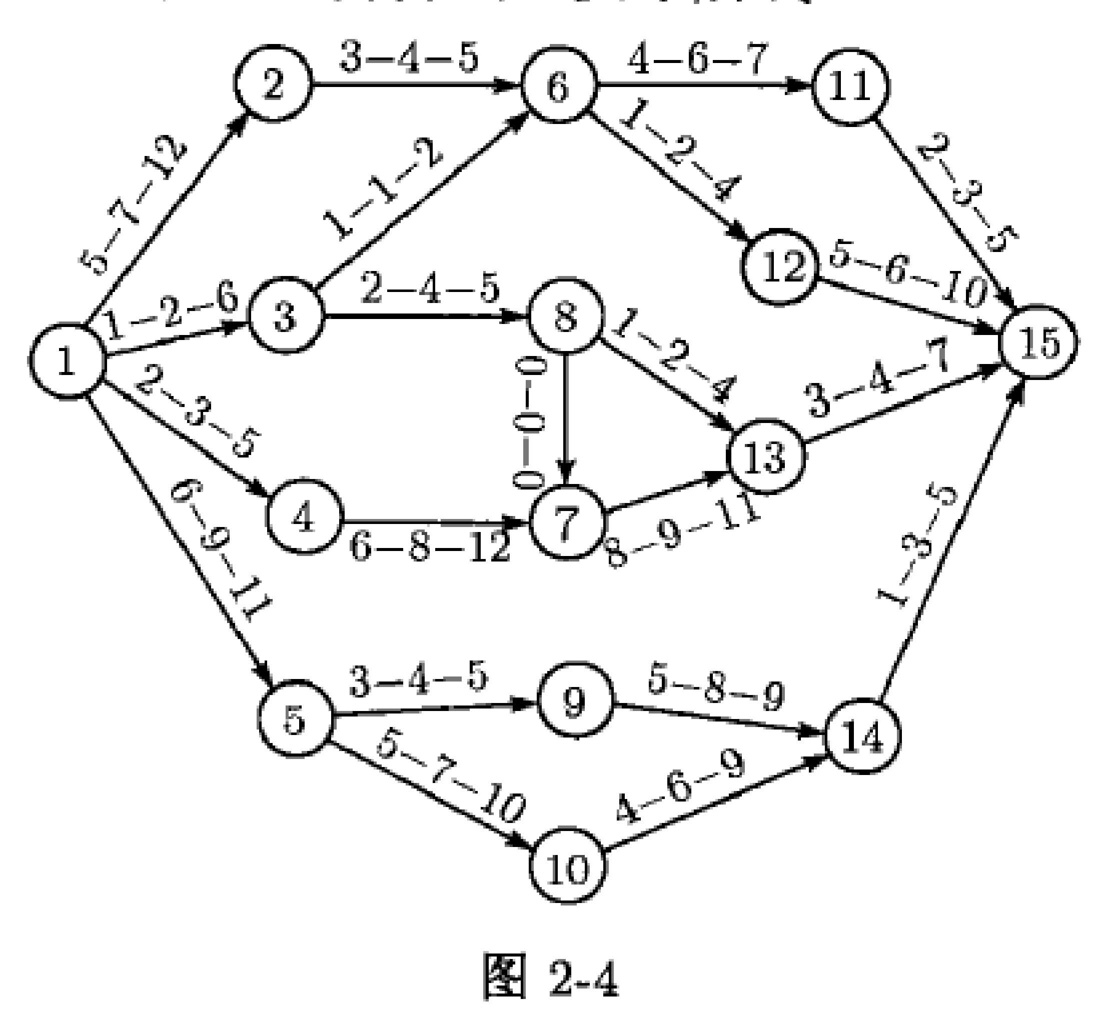


图 2-4

3. 计算图 2-5 的主要矛盾线.

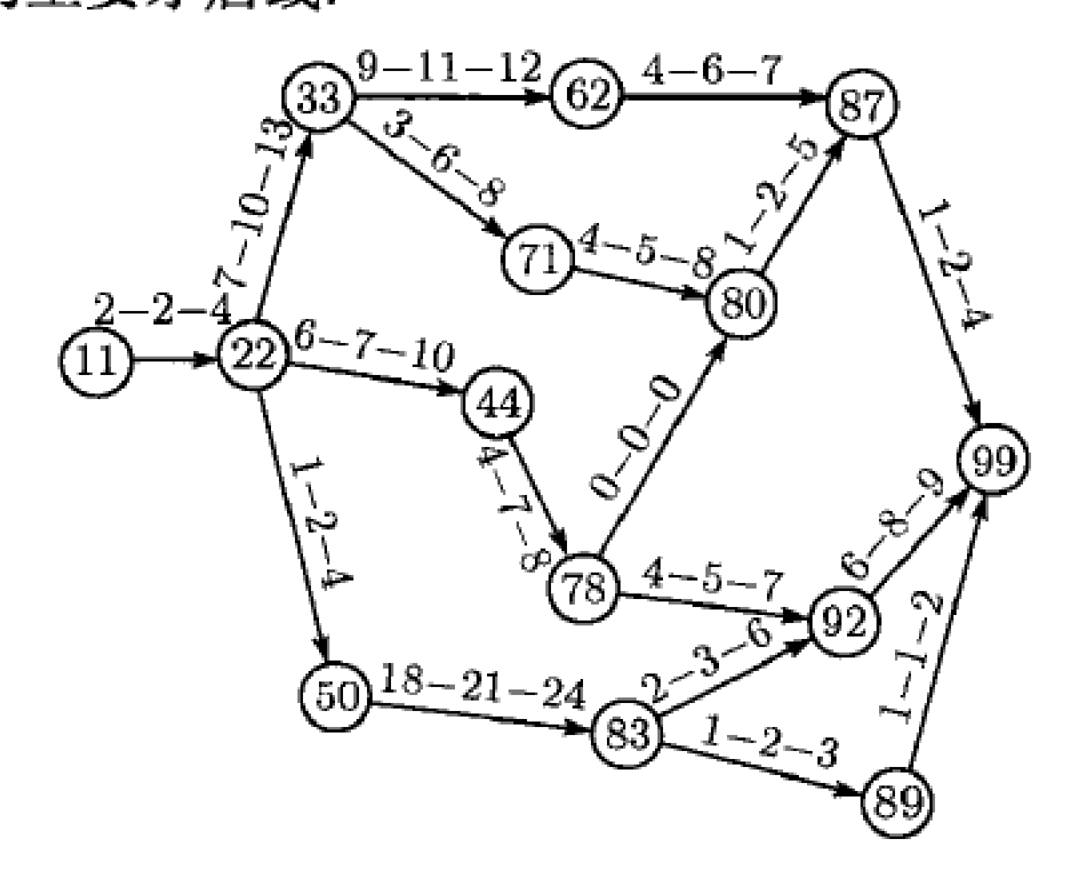


图 2-5

4. 把习题 2,3 化成单代号的形式.

非肯定型的主要矛盾线的画法对吗?①

我们化非肯定型为肯定型, 因而画出了主要矛盾线, 这样的方法对不对? 值得重新考虑. 是否非肯定型应当有从它本身特点考虑出来的主要矛盾线, 现在就来讨论这个问题.

说得确切些, 化为肯定型而算主要矛盾线的方法, 可以描绘成为: 在以 1/2 的可能性来完成整个计划的条件下, 来定主要矛盾线. 因而确切的提法似乎应当是: 给了一个预计完成日期, 在所有的线路中, 依预计日期完成的可能性最小的才是主要矛盾线.

算法是: 对各条路线都用 §15 的方法算出在预定时间之前完成的可能性, 把可能性最小的及非常接近于最小的线路定为主要矛盾线.

第 i 条路线的平均时间是 M_i, 标准离差 σ_i, 给定日期是 Q, 则由

$$Q = M_i + \lambda\sigma_i \quad \lambda = \frac{Q - M_i}{\sigma_i}$$

而这条路线在 Q 周前完成的可能性是

$$p\left(\frac{Q - M_i}{\sigma_i}\right)$$

数值最小的所对应的路线作为主要矛盾线.

由于 $p(\lambda)$ 是 λ 的增函数, 因此只要在

$$\frac{Q - M_i}{\sigma_i}$$

中找出数值最小的就够了.

在实际计算中不必要算出所有的 $(Q - M_i)/\sigma_i$ 来, 只要考虑那些 M_i 比较大的, 再考虑 σ_i 中比较大的就够了. 因为全部算出, 往往不胜其烦, 且作用不大.

§17 为什么这样定平均数?

为什么用公式

$$M = \frac{a + 4c + b}{6}$$

来代表平均数? 为什么用

$$V = \left(\frac{b - a}{6}\right)^2$$

①§16 ~ 19 是研究讨论性质的, 用了一些较难懂的数学, 有困难的读者可以跳过去.

来表示方差. 美国的一些专家说, 这样算还是符合实际的, 但怎样解释呢? 当然, 只能加以解释, 而不能像普通数学上那样"证明". 先讲我们的解释, 再介绍美国所流行的一种解释, 他们的解释既要用到高深数学, 又似乎得不出需要的结论来.

a 是最乐观的估计, c 是最可能的估计, 我们用加权平均, 在 (a,c) 之间的平均值是

$$\frac{a+2c}{3}$$

假定 c 的可能性两倍于 a 的可能性. 同样在 (c,b) 之间的平均值, 是

$$\frac{2c+b}{3}$$

因此完成日期的分布可以用

$$\frac{a+2c}{3}, \frac{2c+b}{3}$$

各以 $\frac{1}{2}$ 可能性出现的分布来代表它 (渐近). 如果这是对的, 这两点的平均数是

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a+2c}{3}+\frac{2c+b}{3}\right)=\frac{a+4c+b}{6}$$

而方差是

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a+4c+b}{6}-\frac{a+2c}{3}\right)^2+\left(\frac{a+4c+b}{6}-\frac{2c+b}{3}\right)^2\right]\\&\quad=\left(\frac{b-a}{6}\right)^2\end{aligned}$$

再看美国一些 PERT(这是美国对非肯定型方法所叫的名称) 工作者的说法, 他们说完成时间的分布是依所谓 β 分布的规律的, 假定方差是 $\frac{1}{36}(b-a)^2$, 则均值的渐近值就等于 $\frac{1}{6}(a+4c+b)$. 为什么方差是 $\frac{1}{36}(b-a)^2$ 没有交待, 即使如此, 也不能用 β 分布推得以上的结论来. 当然另一个可能性是我没有看懂. 但我把他们的论点交待如下:

为了简单起见, 我们用 $a=0, b=1.\beta$ 分布的定义是

$$\beta(x)=x^p(1-x)^q/B(p+1,q+1)$$

这儿

$$B(m,n)=\frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(m+n)}$$

把这些条件用上:

(1) 在 $x=c$ 处取极大值, 即

$$\frac{d\beta(x)}{dx}|_{x=c}=0$$

由此推出

$$px^{p-1}(1-x)^q-qx^p(1-x)^{q-1}=0$$

即

$$p(1-x)-qx=0\ x=\frac{p}{p+q}$$

即得

$$c=\frac{p}{p+q}$$

(2) 均值的近似值等于

$$\frac{4c+1}{6}$$

均值等于

$$\mu=\int_0^1 x\beta(x)dx=\int_0^1 x^{p+1}(1+x)^q dx/B(p+1,q+1)$$
$$=\frac{B(p+2,q+1)}{B(p+1,q+1)}=\frac{p+1}{p+q+2}$$

即

$$\frac{p+1}{p+q+2}=\frac{1+4c}{6}$$

(3) 方差 $=\frac{1}{6^2}$

$$\begin{aligned}方差=&\int_0^1(x-\mu)^2\beta(x)dx\\=&\int_0^1 x^2\beta(x)dx-2\mu\int_0^1 x\beta(x)dx+\mu^2=\int_0^1 x^2\beta(x)dx-\mu^2\\=&\frac{\int_0^1 x^{p+2}(1-x)^q dx}{B(p+1,q+1)}-\mu^2\\=&\frac{B(p+3,q+1)}{B(p+1,q+1)}-\left(\frac{p+1}{p+q+2}\right)^2\\=&\frac{(p+2)(p+1)}{(p+q+3)(p+q+2)}-\left(\frac{p+1}{p+q+2}\right)^2\\=&\frac{(p+1)(q+1)}{(p+q+2)^2(p+q+3)}\end{aligned}$$

算到这儿问题可以改述为：假定

$$\frac{(p+1)(q+1)}{(p+q+2)^2(p+q+3)}=\frac{1}{6^2} \tag{1}$$

则由 $c=p/p+q$ 可以推得

$$\mu=\frac{p+1}{p+q+2}\doteq\frac{1+4c}{6}$$

从

$$c=p/p+q \quad \mu=p+1/p+q+2$$

解得

$$p=\frac{c(1-2\mu)}{\mu-c} \quad q=\frac{(1-c)(1-2\mu)}{\mu-c}$$

$$p+1=\frac{1-2c}{\mu-c}\mu \quad q+1=\frac{1-2c}{\mu-c}(1-\mu)$$

代入 (1) 式

$$\frac{\frac{1-2c}{\mu-c}\mu\frac{1-2c}{\mu-c}(1-\mu)}{\left(\frac{1-2c}{\mu-c}\right)^2\left(\frac{1-2c}{\mu-c}+1\right)}=\frac{1}{6^2}$$

即

$$6^2\mu(1-\mu)(\mu-c)=1+\mu-3c \tag{2}$$

怎样从这个式子推出

$$\mu=\frac{1}{6}(1+4c)$$

是一个疑问.

用了高深数学并没有回答原来的问题.

附记

对一个任务如果经验多了, 通过资料知道它们以往是

$$a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_n,$$

周完成的, 则我们可以用

$$\bar{a}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

来表均值, 用

$$V=\frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n}(\bar{a}-a_i)^2$$

表方差.

§18 整个完成期限适合正态分布律

为什么最后完成期限是一个服从以

$$M=\sum_{i-1}^{s}\frac{a_i+4c_i+b_i}{6}$$

为均值, 以

$$\sigma=\sqrt{\sum_{i-1}^{s}\left(\frac{b_i-a_i}{6}\right)^2}$$

为标准离差的正态分布随机变量, 用到了概率论中有名的中心极限定律, 对不对? 当 s 充分大时, 这可能是一个较好的渐近估计, 细分析一下在实际上用

$$\frac{a_i+4c_i+b_i}{6},\ \left(\frac{b_i-a_i}{6}\right)^2$$

各为均值与方差的时候, 我们已经用了下面的分布来替代了原来的分布:

$$\alpha_i=\frac{a_i+2c_i}{3},\ \beta_i=\frac{2c_i+b_i}{3}$$

各有 $\frac{1}{2}$ 可能性.

如果 s 不太大, 可以用以下的方法来处理, 即

$$\prod_{i=1}^{s}\left(\frac{x^{\alpha_i}+x^{\beta i}}{2}\right)$$

中 x 的指数 $\leqslant Q$ 诸系数之和等于在 Q 周前完成的可能性.

当 s 大时, 这个方法很难直接计算, 是其缺点.

如果不管 $\frac{1}{6}(b_i-a_i)^2$, 而直接从 $\frac{1}{6}(a_i+4c_i+b_i)$ 联想由

$$\prod_{i=1}^{s}\left(\frac{x^{a_i}+4x^{c_i}+x^{b_i}}{6}\right)$$

求其中 x 的指数 $\leqslant Q$ 的诸系数之和那就更直接些, 但计算起来也就更麻烦了.

§19 时差也要用概率处理

现在所算出的最早可能完成时间 T_E, 实际上是在 T_E 前有 1/2 可能性完成. 最迟必须完成时间 T_L, 实际上也是, 如果到 T_L 仍完不成而推迟任务的可能性是 1/2, 因此也应当用概率处理才对.

但为了简单起见, 我们这儿不多谈了. 我们所算出的时差大小, 只是用来作为调整的参考资料而已 (同时每个环节都要这样算, 计算量也太大了).

附带说明一句, 非肯定型比肯定型的计算复杂得多, 因此尽可能避免用非肯定型. 例如: 如果数据都是大致对称的, 也就是 c 是 a、b 的均值 $\frac{1}{2}(a+b)$ 时, 在这种情况下可以作为肯定型来计算. 但要注意结论是平均完成日期.

§20 计　　划

也计有人认为统筹方法仅仅着重于时间, 而忽视了其他. 实质上也不尽然. 因为每道工序所需要的时间是由其他因素决定的. 而我们是在这样的基础上来画箭头图的.

计划的制订, 应当根据邻导的要求来进行. 例如: 领导要求保证质量尽快做成, 没有人力物力的限制. 又如: 要求达到最高工效. 又如: 在现有设备和交货日期的限制下制定等等. 为了简单起见, 我们现在讲一个在时间最短的条件下用人最少的安排方法.

先画出箭头图, 再调查每一工序最短可靠完成时间, 依这些时间画图, 找出主要矛盾线来. 然后在按照主要矛盾线所要求的时间按时完成本工程的条件下, 把非主要矛盾线上的人数 (或设备) 尽可能减少或降低高峰用人. 这样就达到在工期最短的条件下, 用人最少的目标了.

说的抽象些, 计划问题是如下的数学形式:

一项任务需要 100 人周完成, 并不是说 700 人可以一天做成. 也不是说一个人 700 天做完, 往往是人少做不成, 人多窝了工. 所谓 100 个人周的意思是: 在人数恰当的时候、确乎是人数与时间成反比例.

例如 ⓘ→ⓙ 工序的人数 x_{ij} 适合于

$$g_{ij} \leqslant x_{xj} \leqslant h_{ij} \tag{1}$$

也就是说. 当人数少于 g_{ij}, 每人工效显著下降. 当人数多于 h_{ij}, 将出现较严重的窝工现象. ⓘ→ⓙ 需要的工作量是 a_{ij}. 沿每条线算出

$$\frac{a_{ij}}{x_{ij}}$$

的和, 写成为

$$t_k = \sum_{(k)} \frac{a_{ij}}{x_{ij}}$$

是沿第 k 条线路所需要的时间, 而整个工程完成的时间等于所有的 t_k 中的最大者. 即

$$T = \max_{(k)} t_k$$

条件不止 (1) 一个, 还可能有各种各样的条件, 例如某工种的人数限制, 某项设备的限制, 原材料到达日期的限制等, 计划问题在于在这些限制下, 我们求 T 的最小值, 称为最优解.

注意: 这样的数学问题一般是不容易求出最优值的. 首先, 有时这样的问题比一般所知道的规划论上的问题还难, 一下子找不到有效解. 其次, 计算量太大, 不好办. 如果已经有一个设计方案, 可以尽可能地改进, 下次再安排计划时, 便可以在这个基础上进一步加工了.

还必须再赘上一句, 定下 T 的数值之后, 工作并未结束, 在非主要矛盾线的环节上还应当检查: 在不影响整个进度的条件下, 用人能不能再少, 设备能不能再少.

总之, 向主要矛盾环节要时间, 向非主要矛盾环节要节约.

此外, 值得在此一提的是: 在制订计划的时候, 为了保证产品质量, 必须添上一些检查原材料 (或半成品) 质量的箭头, 把不合格的剔除, 以便提高整个产品的合格率.

§21 施　　工

在计划定好后, 我们有了箭头图, 但这个箭头图并不是一成不变的. 为了适应形势的进展, 范围小的可以由专人掌握, 随时了解情况, 及时调整, 指导生产; 而范围大的必须建立一套报表制度, 随时掌握情况. 表格力求简单, 除印好的部分外, 只填几个数字就行了. 例如, 印好的部分如下:

<table>
<tr><td colspan="3">崆峒山</td><td colspan="6">甲</td><td colspan="3">乙</td></tr>
<tr><td rowspan="2">箭尾号码</td><td rowspan="2">箭头号码</td><td rowspan="2">工程性质</td><td colspan="3">开工日期</td><td colspan="3">估计完成日期</td><td colspan="3">重估时间</td></tr>
<tr><td>月</td><td>日</td><td>年</td><td>月</td><td>日</td><td>年</td><td>最短</td><td>最可能</td><td>最长</td></tr>
<tr><td>536</td><td>748</td><td>隧道工程</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="12">(1) 已经开工或已经有开工日期的请填甲栏.
(2) 如还没有确切的开工日期的请填乙栏. 如估计无变化, 则填不变二字, 如有变化请填上重估时间.
(3) 切勿两栏同时填.</td></tr>
</table>

这个表仅供参考之用, 可以根据实际情况制定各种必要的表格, 但原则是表中要填写的内容愈少愈好.

有了表格, 可以做出规定, 例如每月循环两次. 要施工单位按期将报表送给"总调度". 总调度负责分析这些资料. 把分析所得出的意见送给领导. 例如某一环节

进展得快了, 必须通知下一任务的负责单位早日准备进入工地. 又如哪一个环节没有按时完工, 必须采取怎样的特殊措施. 又如主要矛盾线有了变化, 或次要矛盾有转化为主要矛盾的可能了, 等等. 然后将领导批准的意见下达, 指挥生产. 按固定的时间提出报表, 按固定的时间进行分析, 按固定的时间下达指令 (指一般的情况, 特殊情况可以随时下达), 周而复始, 一直到任务最后完成为止.

在"总调度室"备有显示箭头图的模板一块, 根据反映的情况随时修改箭头图 (但必须把修改的过程记录下来). 图上特别标出正在进行的工程及其进度. 具体做法, 必须发挥人的主观能动性, 在实际工作中, 依靠群众, 自始至终地走群众路线, 不断摸索, 不断前进.

§22 总 结

每次修改箭头图的记录, 也是进行总结的好材料. 例如: 由于某一外协工作 (或外协件) 没有及时完成, 由于漏列了某一工序等等, 都可由记录中获悉. 反映最后实施的箭头图, 也就是下次设计的好依据, 或其他地区设计类似工程的良好参考.

各兄弟单位类似工程的最后实施图的对比, 不仅可以找出整个工程的差距来 (用数字表达的差距), 而且可以一分为二地看问题, 分析出在哪些工序上, 我们组织得比较好些, 而哪些比较差些, 因而收到取长补短的效果.

(据中国工业出版社 1966 年 5 月版排印)

优选法平话及其补充

一　“优选法”平话

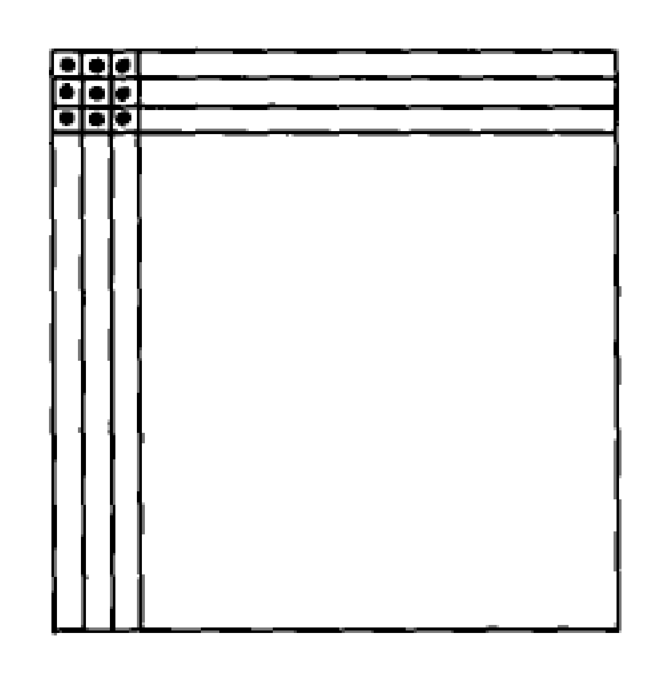
§1 什么是优选方法?

优选的方法的问题处处有, 常常见. 但问题简单, 易于解决, 故不为人们所注意. 自从工艺过程日益繁复, 质量要求精益求精, 优选的问题也就提到日程上来了. 简单的例子, 如: 一枝粉笔多长最好? 每枝粉笔都要丢掉一段一定长的粉笔头, 单就这一点来说, 愈长愈好. 但太长了, 使用起来既不方便, 而且容易折断, 每断一次, 必然多浪费一个粉笔头, 反而不合适. 因而就出现了“粉笔多长最合适”的问题, 这就是一个优选问题.

蒸馒头放多少碱好? 放多了不好吃, 放少了也不好吃, 放多少最好吃呢? 这也是一个优选问题. 也许有人说: 这是一个不确切的问题. 何谓好吃? 你有你的口味, 我有我的口味, 好吃不好吃根本没有标准. 对! 但也不完全对! 可否针对我们食堂定出一个标准来! 假定我们食堂有一百人, 放碱多少, 这一百人有多少人说好吃, 统计一下, 不就有了指标吗? 我们的问题就是找出合适的用碱量, 使食堂里说好吃的人最多.

这只是引子, 是比喻. 实际上问题比此复杂, 还有发酵问题等等没有考虑进去呢! 同时, 这样的问题老师傅早已从实践中摸清规律, 解决了这一问题了, 我们不过用来通俗说明什么是优选方法而已.

优选方法的适用范围是:



怎样选取合适的配方, 合适的制作过程, 使产品的质量最好?

在质量的标准要求下, 使产量最高成本最低, 生产过程最快?

已有的仪器怎样调试, 使其性能最好?

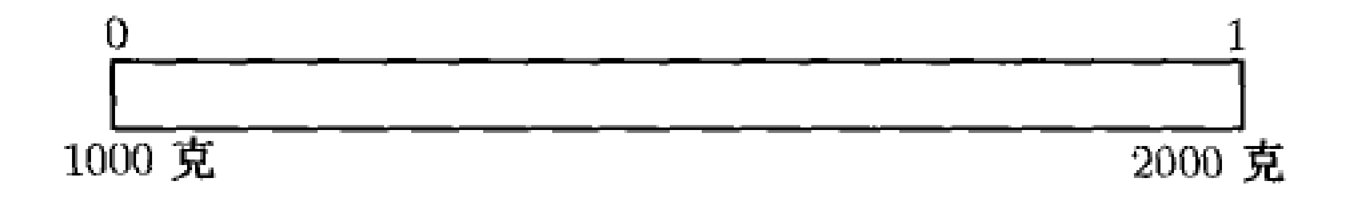
也许有人说我们可以做大量试验嘛! 把所有的可能性做穷尽了, 还能找不到最好的方案和过程? 大量的试验要花去大量的时间、精力和器材, 而且有时还不一定是可能的. 举个简单的例子, 一个一平方公里的池塘, 我们要找其最深点. 比方说每隔一公尺测量一次, 我们必须测量 1000×1000, 总共一百万个点, 这个问题不算复杂, 只有横竖两个因素. 多几个: 三个、四个、五个、六个更不得了! 假定一个因素要求准两位, 也就是分 100 个等级, 两个因素就需要 100×100 即一万次, 三个就需要 $100 \times 100 \times 100$ 即一百万次, 四个就需要一亿次; 就算你有能耐, 一天能做三十次, 一年做一万次, 要一万年才能做完这些实验.

优选方法的目的在于减少实验次数, 找到最优方案. 例如在一个因素时, 只要做 14 次就可以代替 1600 次实验. 上面所说的池塘问题, 有 130 次就可以代替一百万次了 (当然我们假定了池塘底都不是忽高忽低的).

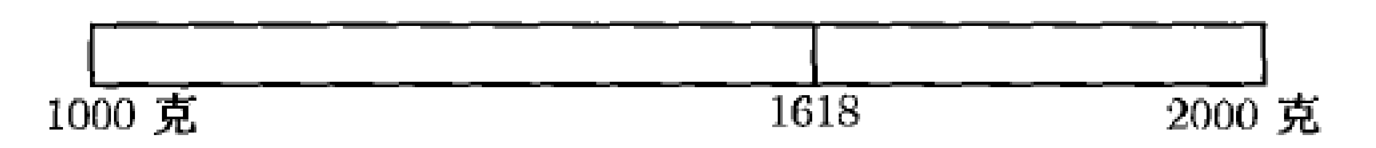
§2 单 因 素

我们知道, 钢要用某种化学元素来加强其强度, 太少不好, 太多也不好. 例如, 碳太多了成为生铁, 碳太少了成为熟铁, 都不成钢材, 每吨要加多少碳才能达到强度最高? 假定已经估出 (或从理论上算出) 每吨在 1000 克到 2000 克之间. 普通的方法是加 1001 克, 1002 克,……, 做下去, 做了一千次以后, 才能发现最好的选择, 这种方法称为均分法. 做一千次实验既浪费时间、精力, 又浪费原材料. 为了迅速找出最优方案, 我们建议以下的“折迭纸条法”.

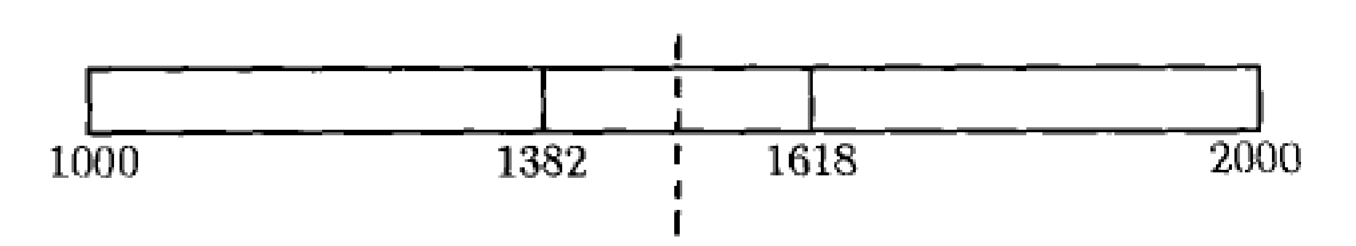
请牢记一个数 0.618.



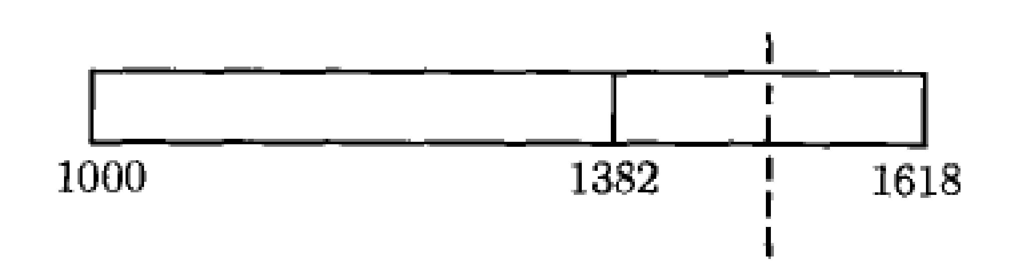
用一个有刻度的纸条表达 1000 ~ 2000 克, 在这纸条长度的 0.618 的地方画一条线, 在这条线所指示的刻度做一次实验, 也就是按 1618 克做一次实验.



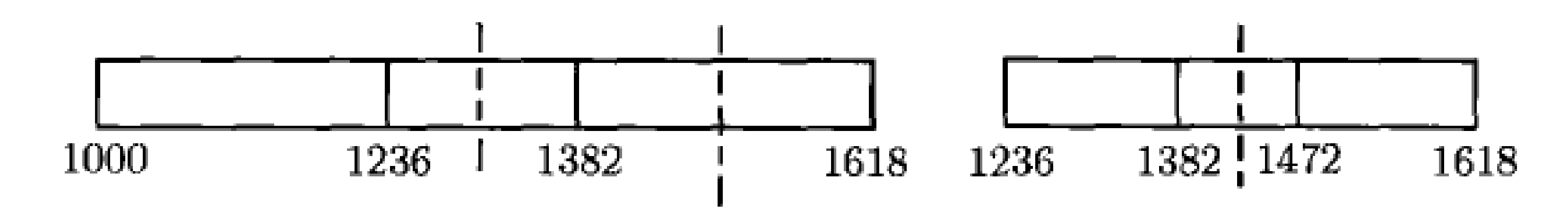
然后把纸条对中迭起, 前一线落在另一层上的地方, 再画一条线, 这条线在 1382 克处, 再按 1382 克做一次实验.



两次实验进行比较, 如果 1382 克的好一些, 我们在 1618 处把纸条的右边一段剪掉, 得:



(如果 1618 克比较好, 则在 1382 克处剪掉左边一段). 再依中对折起来, 又可画出一条线在 1236 克处:



依 1236 克做实验, 再和 1382 克的结果比较. 如果, 仍然是 1382 克好, 则在 1236 处剪掉左边:

再依中对折, 找出一个试点是 1472, 按 1472 克做实验, 做出后再剪掉一段, 等等. 注意每次留下的纸条的长度是上次长度的 0.618(留下的纸条长 $= 0.618\times$ 上次长).

就这样, 实验、分析、再实验、再分析, 矛盾的解决和又出现的过程中, 一次比一次地更加接近所需要的加入量, 直到所能达到的精度.

从炼钢发展的历史也可以充分地看出“优选法”的意义, 最初出现的生铁, 含碳量达 4%, 后来熟铁出世了, 几乎没有含碳量. 在欧洲十八世纪七十年代前, 熟铁还是很盛行的. 各种钢的出现, 就是按客观要求找到最合适的含碳量的过程. 例如: 可以冷压制成汽车外壳的钢是含碳量 0.15% 的低碳钢. 做钢梁的大型工字钢所要求的是含碳量 0.25% 的软钢. 通过热处理可以研化制成车轴、机轴的是含碳 0.5% 的中碳钢. 做弹簧、锤、锉、斧又需要含碳 1.4% 的高碳钢. 各种合金钢就更需要选择配方了.

以上不过拿钢来做例子, 像配方复杂的化学工业、生产条件复杂的电子工业等, 那就更需要优选方法了.

§3 抓主要矛盾

事物是复杂的, 是由各方面的因素决定的, 因而必须考虑多因素的问题. 但在介绍多因素的“优选法”之前, 我们应该学习毛主席的论断: “任何过程如果有多数矛盾存在的话, 其中必定有一种是主要的, 起着领导的、决定的作用, 其他则处于次要的服从的地位.”

"优选法"固然比普通的穷举法 (或排列组合法) 更适合于处理多因素的问题, 但必须指出, 随着因素的增多实验次数也随之迅速地增加 (尽管比普通方法的增加率慢得多), 因此, 为了加快速度节约人力、物力, 减少实验次数, 抓主要矛盾便成为关键的关键; 至少应当尽可能把那些影响不大的因素, 暂且撇开, 而集中精力于少数几个必不可少的、起决定作用的因素来进行研究.

举例来说: 某金属合金元件经淬火后, 产生了一层氧化皮, 我们希望把氧化皮去掉, 而不损害金属表面的光洁度. 有一种方法叫做酸洗法, 就是用几种酸配成一种混合液, 然后把金属元件浸在里面, 目的在短时间内去掉氧化皮, 不损失光洁度.

选择哪几种酸的问题, 这儿不说了. 只说, 已知要用硝酸和氢氟酸, 怎样的配方最好? 具体地说要配 500 毫升酸洗液, 怎样配?

看看因素有多少: 硝酸加多少? 氢氟酸加多少? 水加多少? 什么温度? 多少时间? 要不要搅拌, 搅拌的速度和时间? 一摆下来有七个因素, 每个因素就算它分为 10 个等级, 用穷举法就要做 10^7 次试验, 即一千万次, 就算优选法有本领, 只要万分之一的工作量, 那也要做一千次, 太多啦!

请看搞这项实验的同志是怎样按照毛主席抓主要矛盾的指示来分析问题的.

总共有 500 毫升, 两种酸的用量定了, 水的量也就定了, 所以水不是独立因素.

其次, 配好了就用, 温度的变化不大, 温度不考虑.

再其次, 时间如果指的是配好后到进行酸洗的时间, 我们也不考虑这时间, 因为配好就洗; 如果指酸洗所需要的时间, 那不是因素而是指标, 这次搞出的酸洗液只要三分钟, 所以也不成问题.

最后, 搅拌不搅拌就暂不考虑.

结果就只有两个因素: 硝酸多少? 氢氟酸多少? 因此, 只用一天时间做 14 次试验就把问题解决了. 否则就要成月成年的时间了.

再补充说明一下这样分析的用意: 三种配比有时会误解为三个因素, 实际上只是两个因素 (变数) 是独立的.

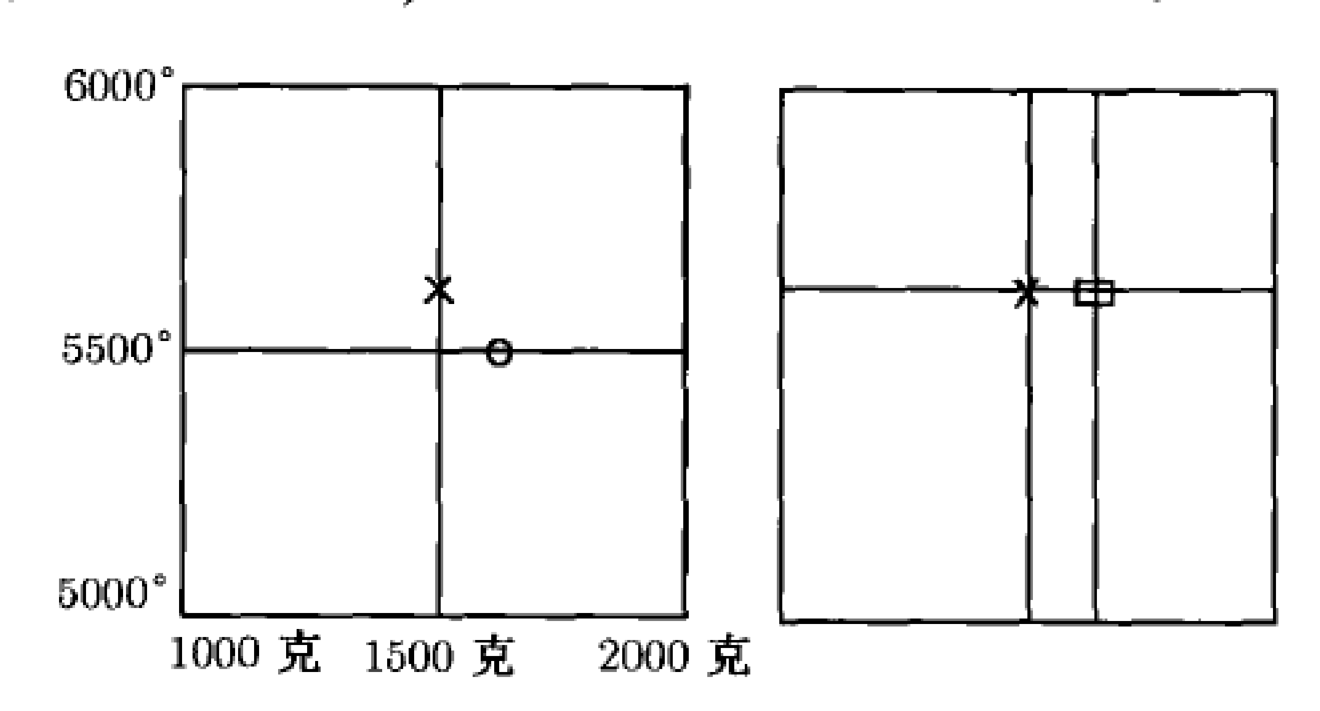
酸洗的时间长短, 不是因素而是指标, 就是说, 该时间不是自变数, 而是因变数.

采用"优选法"的同志必须注意: 在分析问题的时候, 要弄清楚到底有哪些是独立变数, 经验告诉我们这都是易于发生的错误. 还必须再强调一下, 在分析出哪些因素是独立变数之后, 还要看其中哪些因素是主要的.

§4 双 因 素

假如有两个因素要考虑, 一个是含量 1000 克到 2000 克, 另一个是温度 5000 ~ 6000℃.

我们处理的方法：把纸对折一下，例如是在 1500 克处对折，在固定了 1500 克的情况下，找最合适的温度，用单因素方法 (即 §2 的方法) 找到了在“×”处. 再横对折. 在 5500 度时用单因素的方法 (即 §2 的方法)，找到最合适的含量在“○”处. 比较“○”与“×”两处的实验，哪个结果好. 如果在“×”处好，则裁掉下半张纸 (如果在“○”处好，则裁掉左半张). 在余下的纸上再用上法进行.



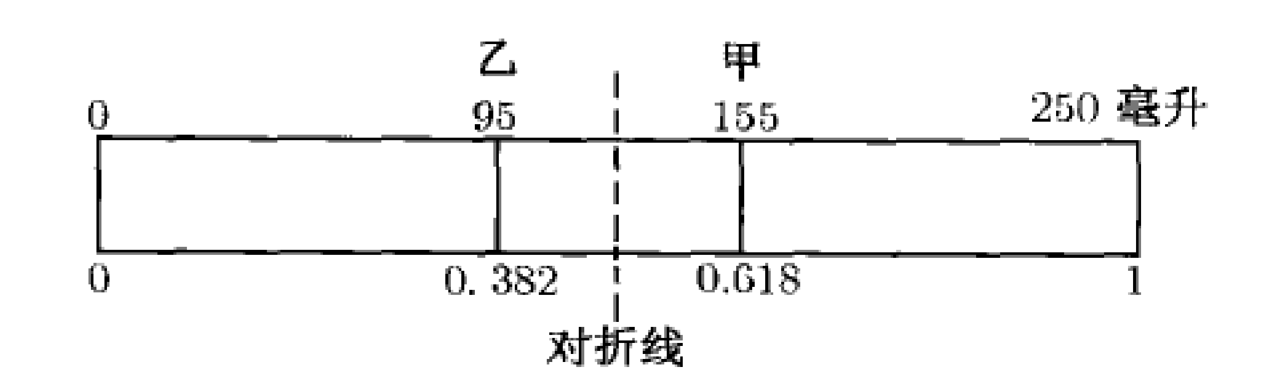
当然因素越多，问题越复杂，但在复杂情况中含有灵活思考的余地. 例如：当我们找到“×”处后，我们放弃对折法，而用通过“×”的横线，在这条横线上作试验，用 §2 的方法找到“□”处最好，再通过在“□”处的竖线上做实验，等等.

例如，某工厂曾处理的问题就是本节提出来的、采用酸洗液洗去金属元件的氧化皮的问题. 经过分析后，将问题变为：配 500 毫升酸洗液；问：水、硝酸和氢氟酸各放多少效果最好？

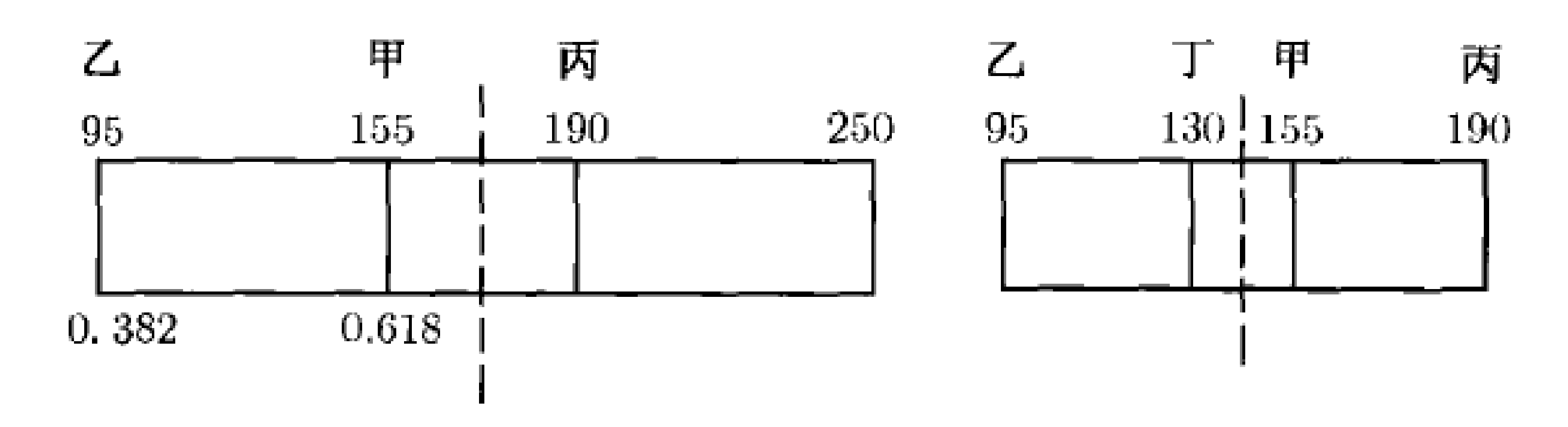
根据经验和有关资料，他们原先拟定：硝酸加入量在 0 ~ 250 毫升范围内变化，氢氟酸在 0 ~ 25 毫升范围内变化，其余加水. 这是一个双因素的问题.

这样的试验，如果采用排列组合的方式进行. 若硝酸 0 ~ 250 毫升按 5 毫升分一等分，共分成 50 个等分. 氢氟酸由 0 ~ 25 毫升按 2 毫升分一等分，共分成 13 等分. 如此需要进行 $50 \times 13 = 650$ 次试验. 这是既花时间又花物力的试验. 我们用“优选法”得出的结果，氢氟酸的取值是 33 毫升，竟超出所试验的范围之外. 因此，就是做遍 650 次也找不到这样好的酸洗液.

用“优选法”指导试验，第一步固定氢氟酸配比在变化范围 0 ~ 25 毫升的正中，假定加入量为 13 毫升，先对硝酸含量进行优选. 具体方法是，把 0 ~ 250 毫升标在一张格子纸条上，用纸条长度表示试验范围. 从 0 开始，按 0.618 的比例先找到第一个试验点甲为 155 毫升，做一次试验. 然后将纸条对折起来，从中线左侧找到甲的对称点乙为 95 毫升，做第二次试验 (见图). 对比甲、乙二试验结果，知道甲



比乙好, 立即剪掉乙点左侧的纸条 (即淘汰小于 95 毫长的试验点), 得出新的试验范围 (即 95 至 250 毫升), 再将剩下纸条对折起来, 找到甲的对称点丙为 190 毫升, 作第三次试验 (见图). 对比丙与甲的结果, 知道甲比丙好, 即将丙点右侧的纸条剪掉 (即淘汰大于 190 毫升的试验点), 又得出新的试验范围 (95 ~ 190 毫升), 再同样对折找甲的新对称点做新的试验 (见图). 如此循环, 到第五次试验即找到硝酸配比最优为 165 毫升. 第二步将硝酸含量固定为 165 毫升, 用同样方法对氢氟酸加入量进行优选, 发现氢氟酸含量在边界点 25 毫升时, 酸洗质量较好, 说明原来给出的范围不一定恰当, 决定在 25 ~ 50 毫升范围再进行优选, 到第九次试验, 找到氢氟酸最优点为 33 毫升. 至此, 共试图十四次, 所找到的配方已经能很好地满足生产的需要了, 因此试验结束. 否则, 还须再次将氢氟酸含量因定为 33 毫升, 再用同样方法对硝酸含量进行优选, 如此做下去, 直到找到最优配方为止. 这个例子说明, 用“优选法”不仅能够多快好省地找到最优方案, 而且可以纠正根据经验初步确定的范围不当的错误.



附记

1. 上述合金酸洗液的选配问题, 在过去两年里, 曾进行过两次试验. 一九六八年的试验失败了, 一九六九年经过许多次试验, 总算找到一种酸洗液配方, 勉强可用; 但酸洗时间达半小时, 还要用刷子刷洗.

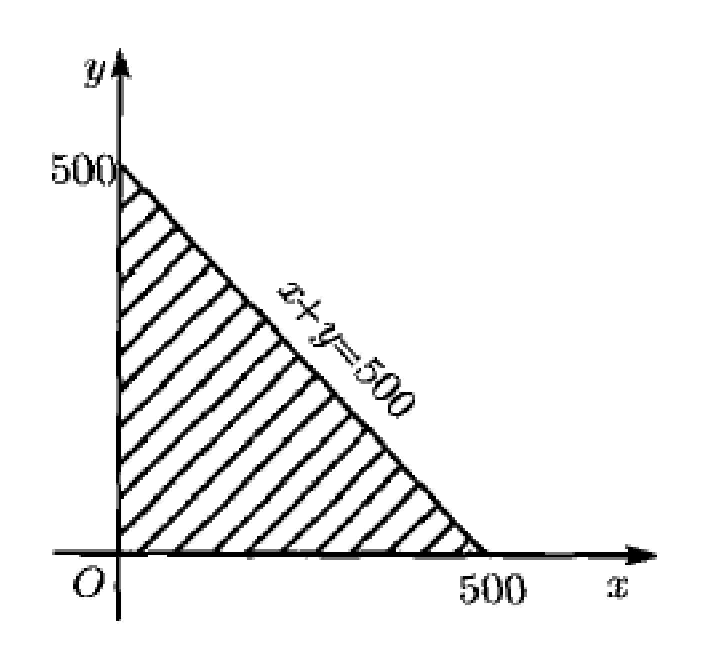
这次采用优选方法, 不到一天时间, 做了十四次试验, 就找到了一种新的酸洗液配方. 将合金材料放入这种新的酸洗液中, 马上反应, 三分钟后, 氧化皮自然剥落, 材料表面光滑毫无腐蚀痕迹.

2. 令 x 代表硝酸量, y 代表氢氟酸量; 根据经验和有关资料, 假定:

$$0 \leqslant x \leqslant 250(\text{毫升};) \quad 0 \leqslant y \leqslant 25(\text{毫升}).$$

如果没有经验和有关资料, 只有如下条件:

$$x+y\leqslant 500,\ 0\leqslant x,\ 0\leqslant y;$$



我们如何处理? 也就是如何进行选配? 在这种情况下, 上述的双因素方法仍可应用, 但应注意在三角形之外的点不在考虑之列. 更好的方法是改换变数:

$$z=x+y,\ x=tz;$$

也就是我们令 $z(0\leqslant z\leqslant 500)$ 代表加入酸的总数量而令 $t(0\leqslant t\leqslant 1)$ 代表硝酸占总酸量的成分并作为自变量. 于是问题仍然归结为在长方形:

$$0\leqslant z\leqslant 500,\ 0\leqslant t\leqslant 1$$

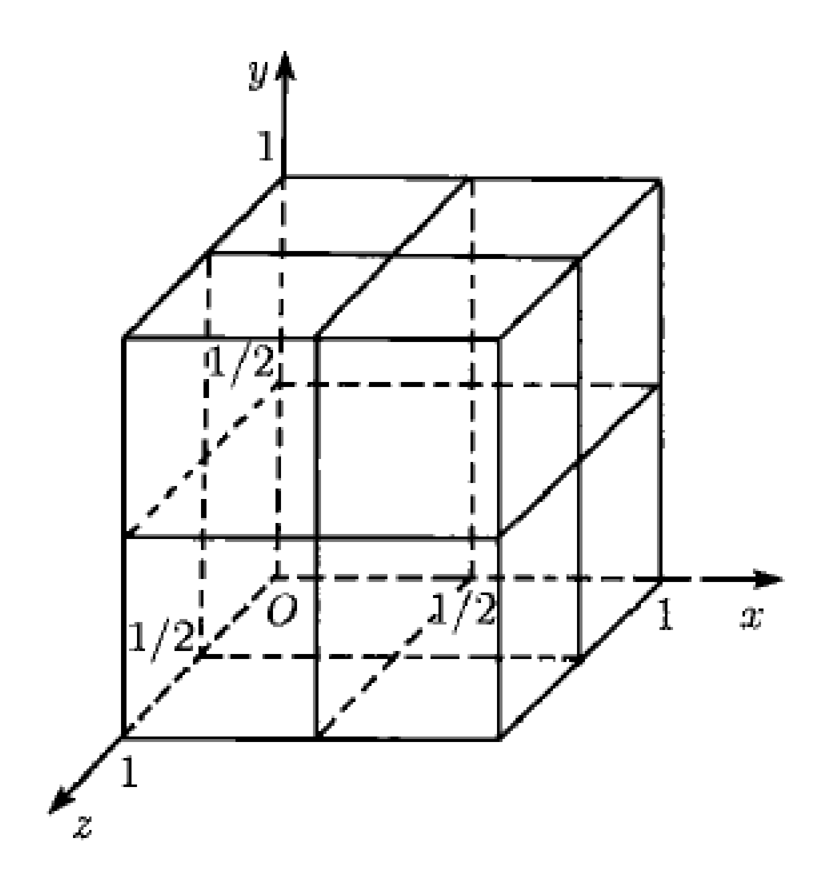
中求最优方案的问题.

§5 多 因 素

(初看时, 此节可略去. 在有些实践经验, 充分掌握了一两个因素的方法之后, 再试看试用这一节.)

也许有人说, "折纸法" 由于纸只有长和宽, 只能处理两个因素的问题, 两个因素以上怎么办? 学过数学的可以用 "降维法" 三个字来处理. 只要理解了怎样降维, 就可以迎刃而解了. 以上两个因素问题的处理方法就是把 "二维" 降为 "一维" 的方法.

我们以上的根据是对折长方形, 现在抽象成为 "对折" 长方体, 也就是把长方体对中切为两半, 大家知道共有三种切法, 在这三个平分平面上, 找最优点, 都是两个因素 (固定了一个因素) 的优选问题. 这样在三个平分面上各找到了一个最优点. 在这三点处, 比较哪个点最好, 把包有这一点的 1/4 长方体留下, 再继续施行此法.



举例说：如果在立方体

$$0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1$$

中找最优点. 在三个平面：

$$x = \frac{1}{2},\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1$$

$$0 \leqslant x \leqslant 1,\ y = \frac{1}{2},\ 0 \leqslant z \leqslant 1$$

$$0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ z = \frac{1}{2}$$

上, 各用双因素法找到最优点：

$$\left(\frac{1}{2},\ y_1,\ z_1\right),\ \left(x_2,\ \frac{1}{2},\ z_2\right),\ \left(x_3,\ y_3,\ \frac{1}{2}\right).$$

看这三个点中哪个最好, 如果 $\left(\frac{1}{2},\ z_1,\ y_1\right)$ 最好, 而且

$$0 \leqslant y_1 \leqslant \frac{1}{2},\ 0 \leqslant z_1 \leqslant \frac{1}{2},$$

则在长方体 $0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2},\ 0 \leqslant z \leqslant \frac{1}{2}$

中继续找下去. 如果 $0 \leqslant y_1 \leqslant \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} \leqslant z_1 \leqslant 1$, 则在长方体

$$0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} \leqslant z \leqslant 1$$

中找下去等等. 总之, 留下来的体积是原来体积的 $\frac{1}{4}$.

在实际操作过程中, 在定出两平面上的最优点后, 可以经比较, 先去掉一半, 然后再处理另一平面.

二　特殊性问题

§1 一批可以作几个试验的情况

例如, 一次可以做四个试验, 怎么办? 根据这一特点, 我们建议用以下的方法:

1. 把区间平均分为五等份, 在其中四个分点上做试验.



2. 比较这四个试验中那个最好? 留下最好的点及其左右. 然后将留下来的再等分为六份. 再在"×"做实验.



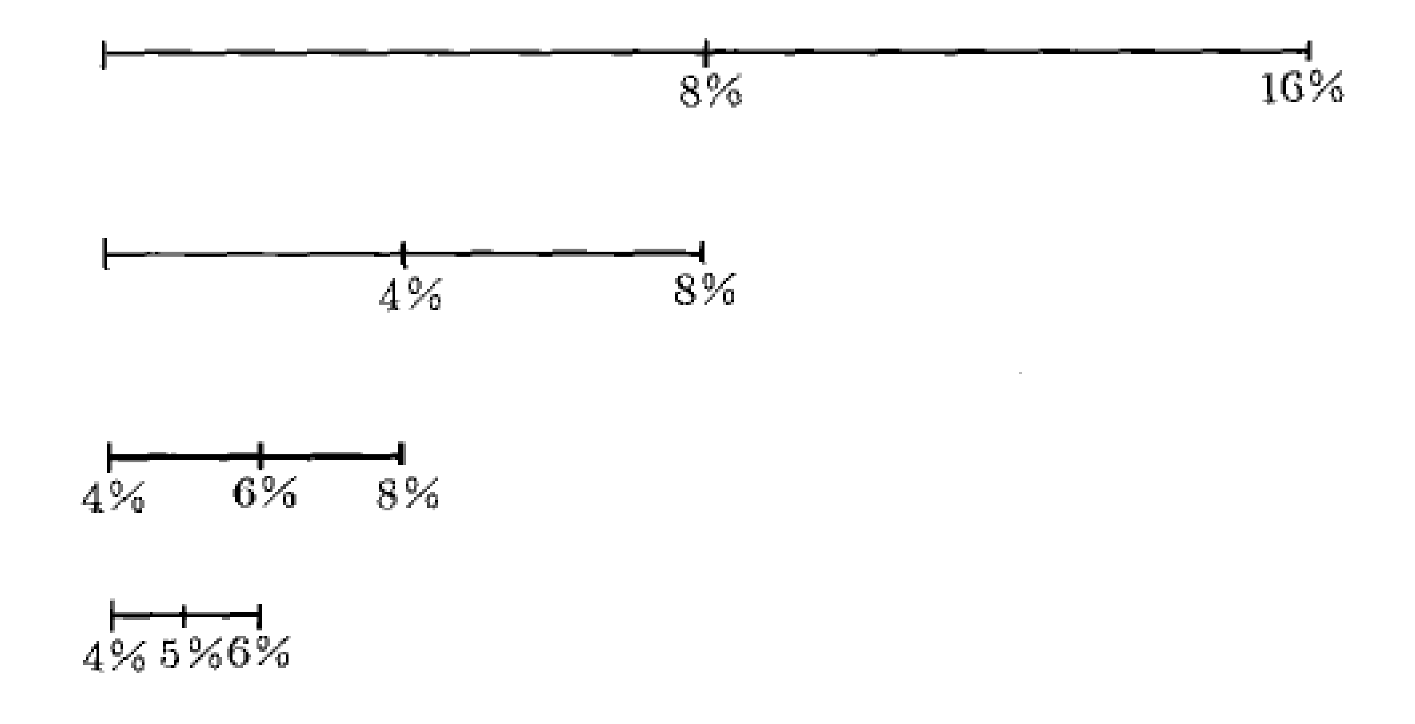
3. 继续留下最好的点及其左右两份区间, 再用同法, 这样不断地做下去, 就能找到最优点.

这是某工厂的工人老师傅所建议的方法, 实质上, 可以证明, 这是最好的方法. 但须注意, 对于每批偶数个实验, 这样均分是最好的. 然而对于每批奇数个实验的情况, 则就比较麻烦些 (每次一个就是 0.618), 这儿不叙述了.

有些资料上认为, "优选法"只适用于每次一个实验. 每次多个试验只好用老方法"实验设计", 这种看法是值得商讨的.

§2 平　分　法

在实践中遇到这样的问题. 某一产品依靠某种贵重金属. 我们知道, 采用 16% 的贵重金属生产出来的产品质量合乎要求. 我们问, 可否少些、更少些呢? 使产品自然符合要求. 这样来降低成本.

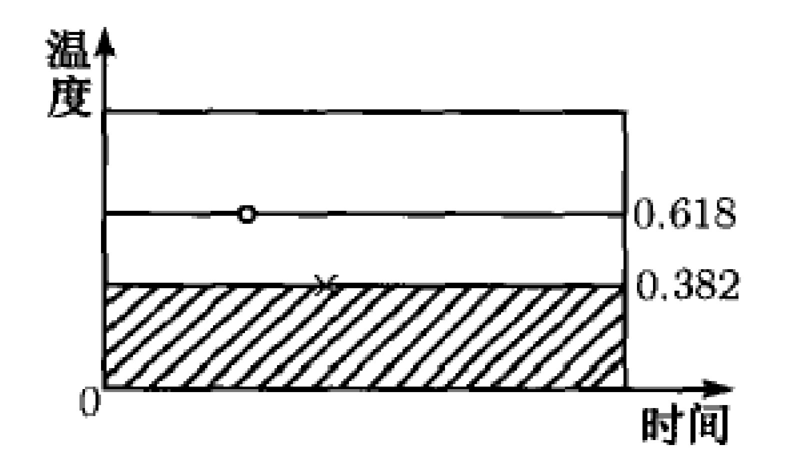


我们建议用以下的平分法, 而不用 0.618 法. 我们在平分点 8%处做试验. 如果 8%仍然合格, 我们甩掉右边一半 (不合格甩掉左边一半). 然后再在中点 4%处做实验, 如果不合格, 就甩掉右边一半. 再在中点 6%处做实验, 如果合格, 再在 4%与 6%之间的 5%处做实验, 仍然合格. 留有余地, 工厂里照 6%的贵重金属进行生产.

这一方法在一些工厂都早已用上了.

§3 平 行 线 法

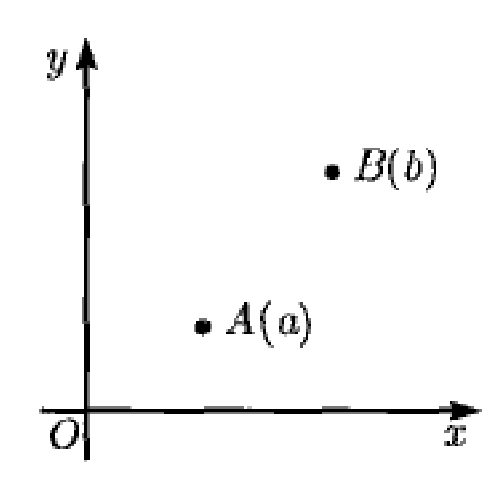
我们的问题是两个因素: 一个是温度, 一个是时间. 炉温难调, 时间易守. 根据这一特点, 我们采用“平行线法”, 先把温度固定在 0.618 处, 然后对不同的时间找出最佳点, 在“○”处. 再把温度调到 0.382 处, 固定下来, 对不同的时间找出最佳点, 在“×”处. 对比之后, “○”处比“×”处好, 我们划掉下面的部分. 然后用对折法找到下一次温度该多少,……



这个方法是某工厂结合实际的创造.

§4 陡 度 法

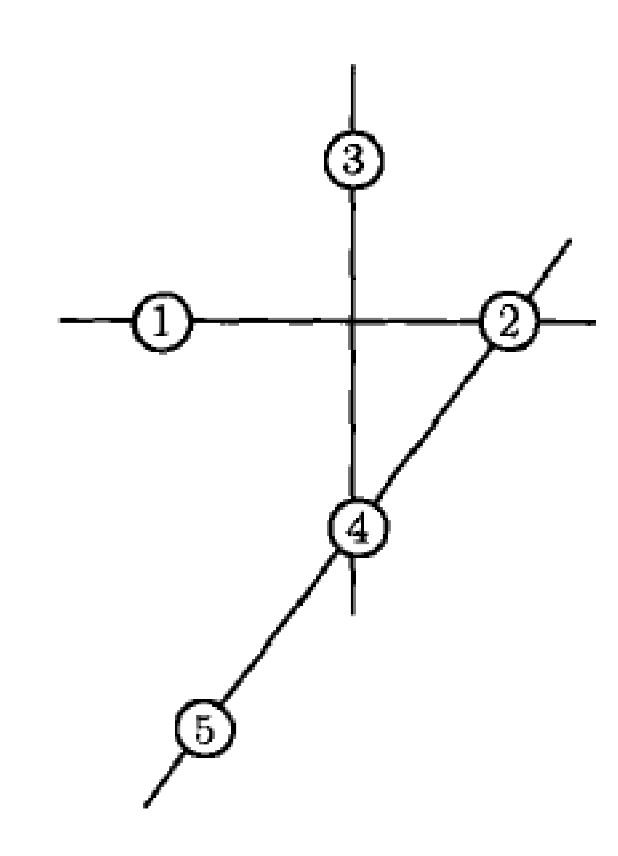
在 A 点做实验得出来的数据是 a, 在 B 点做实验得出来的数据是 b. 如果 $a > b$, 则 $\dfrac{(a-b)}{(A、B\text{间的距离})}$ 称为由 B 上升到 A 的陡度.



在某化工厂, 我们遇到过这类问题. 这是一个双因素的问题, 我们在横线上做了两个实验 (①、②) 之后, 我们立刻转到竖线上去, 又做了两个实验 (③、④). 我

们发现④点特好, ②点特差; 在这种情况下我们就不再在横、竖二线上做实验了. 我们在②与④的连线上⑤点做了一个试验, 结果更好, 超过了我们的要求.

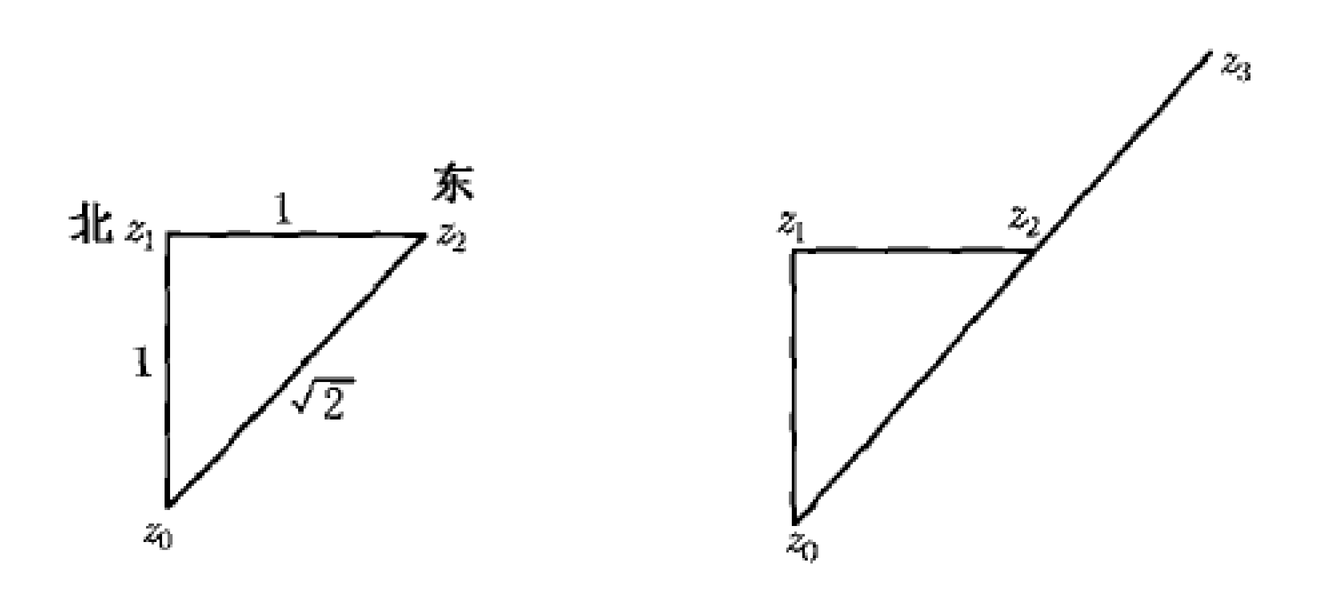
总起来这是陡度问题. 可以计算①到④, ②到④, ③到④的陡度; 看那个最陡, 就向那个方向爬上去.



这个方法在某工厂曾经用过: 从已有的实验数据中发现了很陡的方向, 这个方向正是寻找最优方案的方向. 在这个方向上实验, 我们找到了最满意的点.

§5 瞎子爬山法

瞎子在山上某点, 想要爬到山顶, 怎么办? 从立足处用明杖向前一试, 觉得高些, 就向前一步, 如果前面不高, 向左一试, 高就向左一步, 不高再试后面, 高就退一步, 不高再试右面, 高就向右走一步, 四面都不高, 就原地不动. 总之, 高了就走一步, 就这样一步一步地走, 就走上了山顶.



这个方法在不易跳跃调整的情况下有用, 当然我们也不必一步一步按东南西北四个方向走, 例如在向北走一步向东走一步后, 我们得出 z_0, z_1, z_2 三个数据, 由此可以看到由 z_1 到 z_2 的陡度是 $z_2 - z_1$, 而由 z_0 到 z_2 的陡度是 $\frac{z_2 - z_0}{\sqrt{2}}$, 如果 $\frac{z_2 - z_0}{\sqrt{2}} > z_1 - z_0$, 我们为什么不好尝试在 $\overrightarrow{z_0 z_2}$ 的方向上走一段试试看, 点愈多, 愈

可以帮助我们找向上爬的方向.

这个方法适合于正在生产着而不适于大幅度调整的情况.

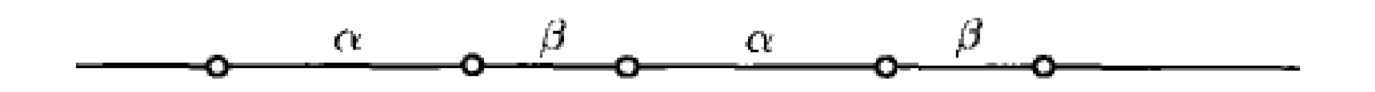
§6 非单峰的情况如何办?

也许有人说, 你所讲的只适用于"单峰"的情况. 多峰 (即有几个点, 其附近都比它差) 的情况怎样办? 我们建议:

1. 先不管它是单峰还是多峰, 就按单峰的方法去做, 找到一个"峰"后, 如果符合要求, 就先开工生产, 然后有时间继续再找寻其他可能的更高的"峰"(即分区寻找).

2. 先做一批分布得比较均匀距离的实验, 看其是否有"多峰"的现象出现, 如果有"多峰"现象, 则按分区寻找. 如果是单因素, 最好依以下的比例划分:

$$\alpha : \beta = 0.618 : 0.382$$



例如, 三个分点, 可以取之如:

a β a β

这留下来的成为:

a β 或 β a

的形式, 这就便于应用 0.618 法.

但不要有所顾虑, 我们的方法不会比穷举法即排列组合法更吃亏些. 充其量不过是, 用"优选法"后, 你再补做按穷举法原定要做的一些实验而已.

在实际工作中, 尤其在探索未知的科研项目, 已经见到过一些比较复杂的问题. 比方出现鞍点 (即马鞍形的中间点, 该点对左右而言它是极大, 对前后则它又是极小) 的情况. 这要按常规做法, 会发生一辈子都做不完的情况. 但用"优选法"在一两周即完成了. 在化工系统碰到过不少这种例子.

三 补 充

我们扼要地在第一部分平话中讲了一般性的方法, 在第二部分列举了一些特殊性的方法. 在"用"的过程中, 如对以上两部分仍不能满足, 可以参考这第三部分.

如果读者一时不能全懂, 不要急, 拣能用的就用. 在不断实践，不断思考的过程中, 会有所前进的. 至于看理论完整的专书, 最好是在有些实际经验之后.

§1 这是一个求最大 (或最小) 值的问题

对学过数学的人来说, 这是一个求函数的最大 (或最小) 值的问题. 例如：某一质量指标 T 取决于三个因素的大小, 也就是

$$T = f(x, y, z).$$

问题的中心在于变化范围

$$a \leqslant x \leqslant p,\ b \leqslant y \leqslant q,\ c \leqslant z \leqslant r$$

内求函数 $f(x, y, z)$ 的最大值. 也许有人认为这是在微积分书上早已见到并熟悉了的问题. 但实际上, 有一个能行不能行的问题. 首先, 你必须知道函数 $f(x, y, z)$ 的表达式, 即使知道了 $f(x, y, z)$ 的解析式, 还要解联立方程.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \frac{\partial f}{\partial z} = 0;$$

这可能是超越方程, 求解并不容易; 即使解出来了, 还要判断, 并且研究它是不是整个区域内的最大值.

但简单的 $f(x, y, z)$ 不常见, 还可能未被发现, 甚至根本写不出来. 例如上面平话部分所提到的, “说好吃的”人数百分比是用碱量的一个怎样的函数?

也许有人建议, 用统计回归找出一个公式, 然后再求极大值. 但统计学总是需要大量实验, 计算也不简单, 而且用回归得出来的函数往往简单得失真 (经常假定是一次二次的). 我们既有做大量实验的打算, 为什么不直接采用优选方法呢? 何况这样做, 实验次数还可大大减少!

§2 0.618 的 由 来

0.618 是

$$W = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

的三位近似值, 根据实际需要可以取 0.6, 0.62, 或比 0.618 更精确的值.

W 这一个数有一个特殊性, 即

$$1 - W = W^2 \left(\text{该方程的正解是}\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

W 与 $1-W$ 把区间 [0,1] 分为如下图的形式：

$$0 \quad \frac{3-\sqrt{5}}{2}\ (1-W=W^2) \quad \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\ (W) \quad 1$$

不管你丢掉那一段 ($[0,(1-W)]$ 或 $[W,1]$), 所余下的包有一点, 其位置与原来两点之一 ($1-W$或W) 在 [0,1] 中所处的位置的比例是一样的. 具体地讲, 原来是 $0<1-W<W<1$ 丢掉右边一段 ($[W,1]$) 后的情况是：

$$0<1-W=W^2<W,$$

这不正是 [0,1] 缩小 W 倍的情况吗？

同样, 丢掉左边一段 ($[0,(1-W)]$) 后的情况是：

$$1-W<W=(1-W)+W(1-W)<1,$$

这区间的总长度还是 W, 而 W 与 1 的距离是 $1-W$ 的 W 倍.

这方法是平面几何学上的黄金分割法, 因而这个"优选法"也称为黄金分割法, 在中世纪欧洲流行着依黄金分割法做的窗子最好看的"奇谈"(也就是用 0.382：0.618 的比例开窗子最好看).

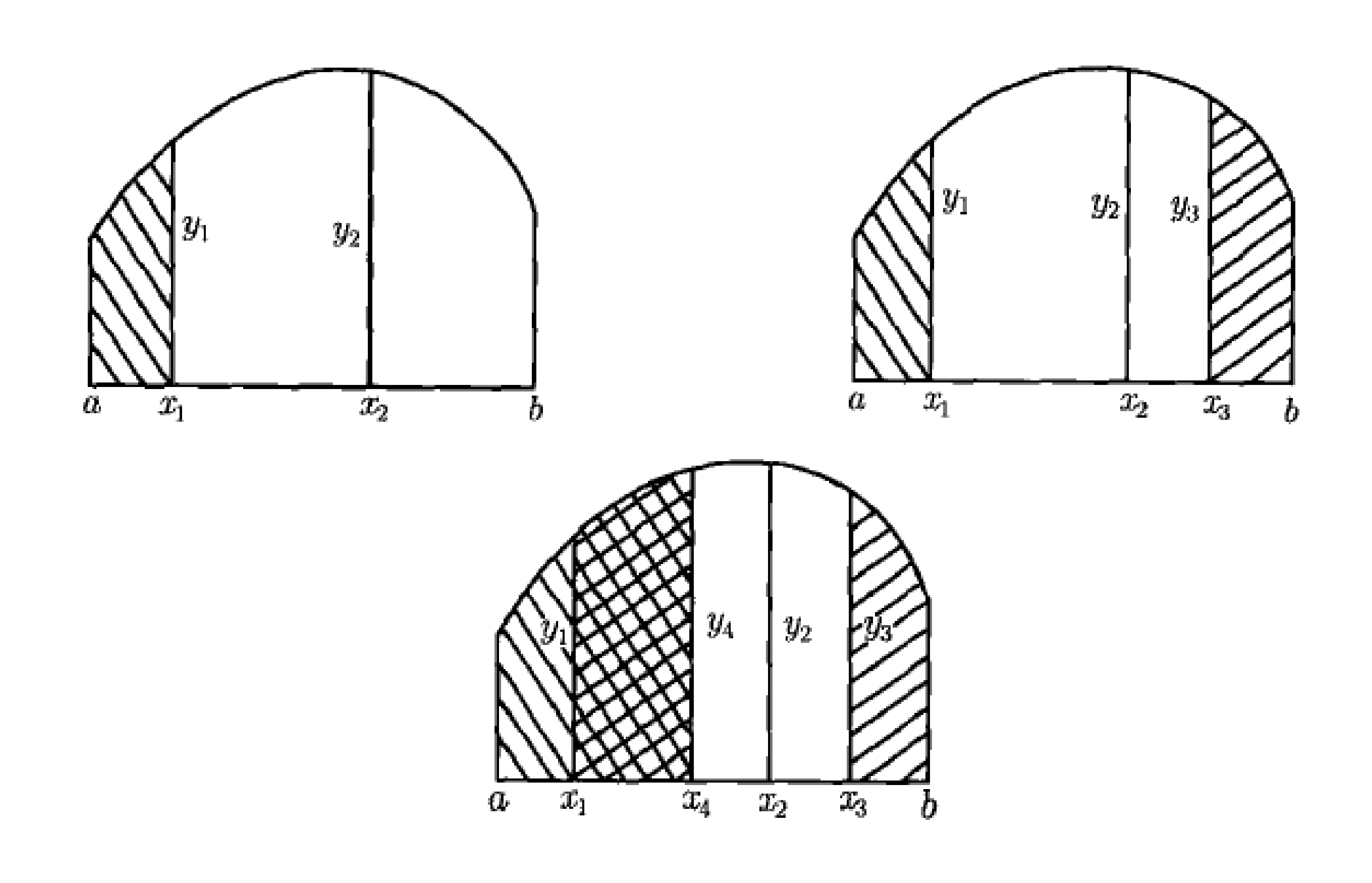
§3 "来回调试法"

读者不要以为上一节已经回答了 $W=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 的来源了.

问题更准确的提法应是：在区间 $[a,b]$ 内有一个单峰函数 $f(x)$, 我们有如下的方法找到它的顶峰 (并不需要函数 $f(x)$ 的真正表达式).

先取一点 x_1 做实验得 $y_1=f(x_1)$, 再取一点 x_2 做实验得 $y_2=f(x_2)$, 如果 $y_2>y_1$, 则丢掉 $[a,x_1]$ (如果 $y_1>y_2$, 则丢掉 $[x_2,b]$). 在余下的部分中取一点 x_3(这点 x_3 也可能取在 x_1,x_2 之间), 做实验得 $y_3=f(x_3)$, 如果 $y_3<y_2$, 则丢 $[x_3,b]$, 再在余下的 (x_1,x_3) 中取一点 $x_4,\cdots\cdots$ 不断做下去, 不管你怎样盲目地做, 总可以找到 $f(x)$ 的最大值. 但问题是：怎样取 $x_1,x_2\cdots\cdots$ 使收效最快 (这里, 效果是对任意 $f(x)$ 而言的), 也就是做实验的次数最少. 要回答这一问题, 还需要一些并不高深的数学知识 (例如：《高等数学引论》第一章的知识), 不在这儿详谈了①. 但必须指出, 外国文献上的所谓证明并非证明.

① 对归纳法熟悉的同志, 建议先用它证明 F_{n+1} 的表达式及分数法是最好的. 然后再证分数法的极限就是黄金分割法, 但归纳法的缺点在于要先知道结论.



§4 分 数 法

在我国数学史上关于圆调率 π 有过极为辉煌的一页. 伟大的数学家祖冲之 (公元前 429 ~ 500 年) 就有以下两个重要贡献. 其一, 是用小数来表示圆周率:

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927.$$

其二, 是用分数

$$\frac{355}{113}$$

来表示圆周率, 它准到六位小数, 而且其分母小于 33102 的分数中没有一个比它更接近于 π.

这种分数称为最佳渐近分数 (可参考:《从祖冲之的圆周率谈起》, 见本书 67 页至 77 页).

我们现在处理

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

也有两种方法, 其一是小数法 0.618, 其二是分数法, 即上述所引用的小书上的方法, 可以找到这数的渐近分数:

$$\frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}, \frac{55}{89}, \frac{89}{144}, \cdots\cdots$$

这些分数的构成规律是由:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, …… 得来的, 而这个数列的规律是:

$1+1=2,\ 1+2=3,\ 2+3=5,\ 3+5=8,\ 5+8=13,\ 8+13=21,\ 13+21=34,\ \cdots\cdots$

是否要这样一个一个地算出？能不能直接算出第 n 个数 F_n 呢？一般的公式是有的, 即

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

(读者可以参考《从杨辉三角谈起》, 见本书 17 页至 60 页, 有了这个公式, 读者也可以用归纳法直接证明). 读者也极易算出:

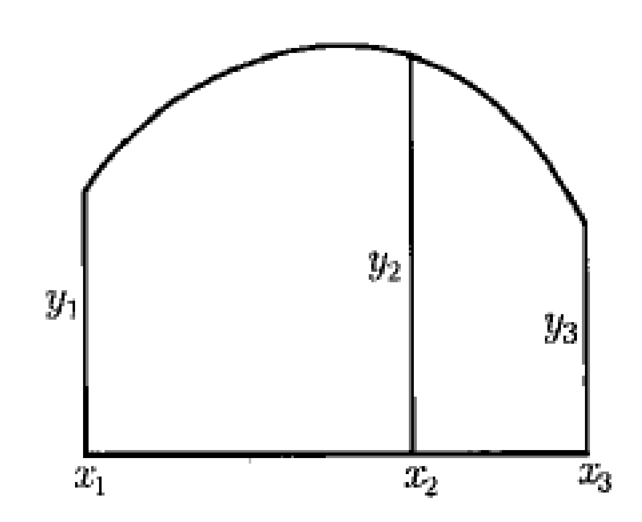
$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=W=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

由渐近性质, 读者也可以看到分数法与黄金分割法的差异不大, 在非常特殊的情况下, 才能少做一次实验.

如果特别限制试验次数的情况下, 我们可用分数来代替 0.618, 例如: 假定做十次实验, 我们建议用 $\frac{89}{144}$, 如果做九次实验用 $\frac{55}{89}$ 等等. 这种情况只有试验一次代价很大的情况才用.

§5 抛物线法

对技术精益求精, 不管是黄金分割法或是分数法, 都只比较一下大小, 而不管已做实验的数值如何. 我们能不能利用一下, 例如在试得三个数据后, 过这三点作一抛物线, 以这抛物线的顶点作下次试验的根据. 确切地说在三点 x_1, x_2, x_3 各试得数据 y_1, y_2, y_3 我们用插入公式



$$\begin{aligned}y=&y_1\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+y_2\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}\\&+y_3\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.\end{aligned}$$

这函数在

$$x_0=\frac{1}{2}\cdot\frac{y_1(x_2^2-x_3^2)+y_2(x_3^2-x_1^2)+y_3(x_1^2-x_2^2)}{y_1(x_2-x_3)+y_2(x_3-x_1)+y_3(x_1-x_2)}$$

处取最大值. 因此我们下一次的选点取 $x = x_0$(但最好是当 y_2 比 y_1 和 y_3 大时, 这样做比较合适). 同时当 $x_0 = x_2$ 时, 我们的方法还必须修改. 例如: 取 $x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$.

§6 双变数与等高线

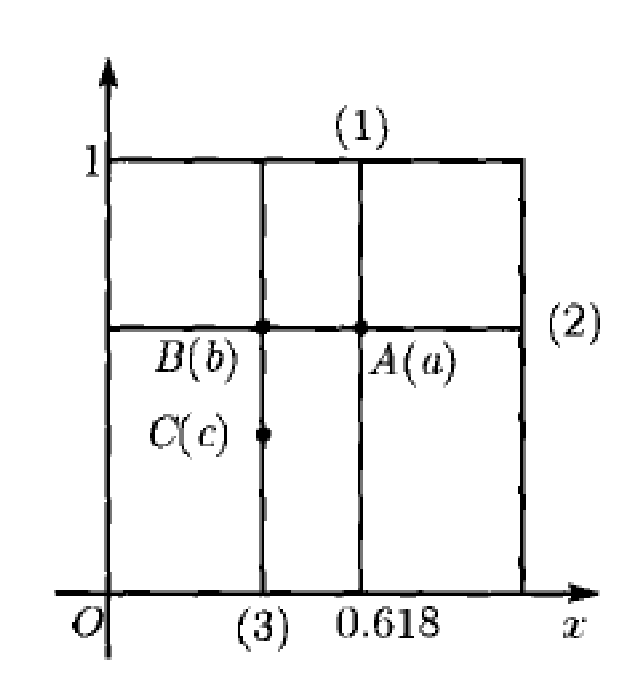
变数多了, 问题复杂了, 也就困难了. 但问题愈复杂, 就愈需要动脑筋, 也愈有用武之地. 第二部分中曾经提到过, 我们并不要做完一条平分线后再做另一条, 而是可以在每条线上做一两个试验就可以利用“陡度”了. 也有人建议: 第一批试验不在对折线上做, 而在 0.618 线上用单因素法求出这直线上的最优点. 这建议好, 下一批实验可以少做一个. 我们也提起过, 在温度难调, 时间好守的情况下, 用平行线法, 这些变“着”都显示着, 在复杂的情况下, 更需要灵活思考.

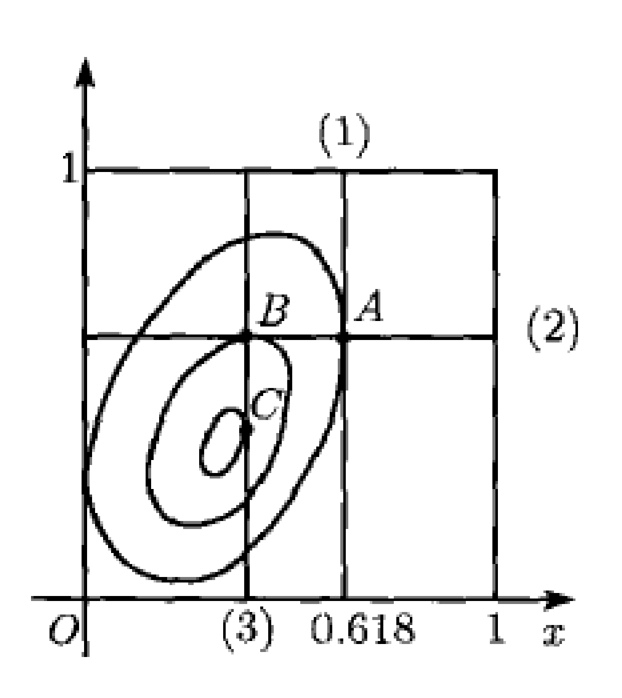
我们还是从两个变数谈起.

我们假定在单位方

$$0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1$$

中做实验, 寻求 $f(x,y)$ 的最大值. 从几何角度来看, $f(x,y)$ 可以看成为在 (x,y) 处的高度. 如果把 $f(x,y)$ 取同一值的曲线称为等高线, $f(x,y) = a$ 的曲线称为高程是 a 的等高线. 这样两个变数问题的几何表达方式就是更有等高线的地形图.





我们再回顾一下, 以往我们在一直线上求最佳点的几何意义. 例如在 $x = 0.618$ 的直线 (1) 上, 照单因素方法做实验: 找到最佳点在 A 处, 数值是 a. 这一点是一等高线 (高程为 a) 的切点. 再在通过 A 的、平行于 x 轴的直线上找最佳点, 这点在 B 处, 数值是 b. 这样 $b > a$, 而且 B 点是等高线 $f(x,y) = b$ 的切点. 再在通过 B 平行于 y 轴的直线上找最佳点等 …… . 这一方法就是一步一步地进入一个高过一个的等高圈, 最后达到制高点的方法.

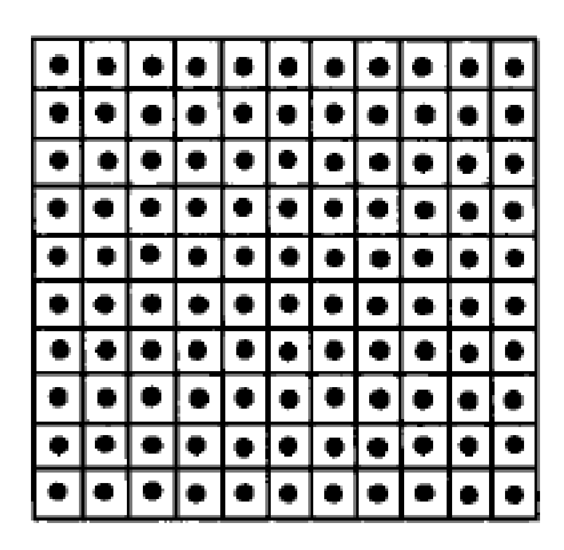
注意: 有人认为, 找到一点横算是最优, 竖算也最优, 这样的点称为“死点”, 因为以上的方法再也做不下去了. 实际上, 这是误会, 这不是“死点”, 而是最有意义的点 (读者试从 $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, 就可以看出这点所处的地位了).

有了几何模型, 就可以启发出不少方法, 第二部分所讲的陡度就是其中之一. 例如还有: 最陡上升法 (梯度法), 切块法, 平行切线法等等.

多变数的方法不少, 不在这儿多叙述了. 但必须指出: 资本主义国家流行了很多名异实同, 巧立名目, 使人看了眼花缭乱的方法. 为专名、为专利, 这是资本主义制度下所产生的自然现象. 但我们必须循名核实、分析取舍才行.

§7 统计试验法

把一个正方形 (或长方形), 每边分为一百份, 总共有一万个小方块, 每块取中心点. 共一万个点. 我们的目的是: 找出一点, 在哪点实验所得的指标最好.



如果我们考虑容易一些的问题, 找出一点比 8000 点的指标都好, 我们建议用以下的方法:

把这些点由一到一万标起号来. 另外做一个号码袋, 里面有一万个号码. 摸出哪一个号码就对号做试验, 这方法叫做统计试验法. 也就是外国文献上所谓的蒙特 - 卡罗 (Monte–Carlo) 法.

它的原理是: 一个袋内装有 2000 个白球, 8000 个黑球, 摸出一个白球的可能性是 2000/10000=0.2=20%; 摸出一个黑球的可能性是:

$$1 - 0.2 = 0.8,$$

连摸两个都是黑球的可能性是:

$$0.8^2 = 0.64,$$

连摸四个都是黑球的可能性是:

$$(0.8)^4 - (0.64)^2 = 0.41,$$

连摸八次全是黑球的可能性是:

$$(0.8)^8(0.41)^2 = 0.17,$$

连摸十次全是黑球的可能性是:

$$(0.8)^{10}=(0.8)^8(0.8)^2=0.11,$$

也就是连摸十次有白球的可能性是:

$$1-0.11=0.89,$$

也就是差不多十拿九稳的事了.

结合以上的问题, 我们随机做十次试验, 有 89%的把握找到一点比 8000 点的指标都好.

这方法的优点在于, 不管峰峦起伏, 奇形怪状都行, 因素多少关系也不大.

缺点在于毕竟是统计方法, 要碰"运气", 大数规律、实验次数多才行.

其中还包括一个"摸标号"的问题. 除在上面所介绍的号码袋外, 还有所谓"随机数发生器". 一种是利用盖格计数器计算粒子数, 看奇、偶, 用二进位法来决定的; 另一种是利用噪声放大器. 这些机器有快速发生随机数的优点, 但就做实验的速度而言, 并不需要如此快速地产生随机数.

更好的方法是数论方法 (见华罗庚与王元《数值积分及其应用》, 科学出版社, 1963 年). 这一方法既不需要任何装置, 而且误差不像上述所讲的两种机器那样是概率性的, 而是肯定性的.

这一方法, 读者务必要分析接受, 不要轻易应用.

§8 效 果 估 计

把 [0,1] 均分为 $n+1$ 分, 做 n 个试验, 可以知道最优点在 $\frac{2}{n+1}$ 长的区间内. 如果约定的精度是 δ, 则我们需要做的试验次数便是使得

$$\frac{2}{n+1}<\delta$$

的 n, 也就是 n 的数量级是 $\frac{1}{\delta}$.

对黄金分割法来说, 做 n 次试验可以知道最优点在一个长度为 $(0.618)^{n-1}$ 的区间内, 如果要求它小于 δ, 不难算出

$$n>4.8\log\frac{1}{\delta}.$$

也就是说 n 的数量级变成为 $\log\frac{1}{\delta}$.

对 k 个变数来说, 均分法的数量级是 $\left(\frac{1}{\delta}\right)^k$, 上面讲过的由黄金分割法处理的多变数的方法需要实验次数的数量级是 $\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^k$.

我们有达到数量级 $k\log\frac{1}{\delta}$ 的方法.

实质上我们还有数量级为 $\left(\log\,\log\frac{1}{\delta}\right)^k$ 的方法. 而 k 在指数上不好, 我们又跃进了一步, 得出数量级为

$$\frac{k^2}{\log\,k}\log\,\log\delta$$

的方法.

但千万注意, 并不是理论上最精密的方法, 也在实际上最适用. 最重要的是根据具体对象, 采用简快适用的方法.

注意: 预先估计精度 δ, 并不是完全可靠的. 有时平坦些, 很大的间隔都不易分辨高低, 有时陡些, 很小间隔就有着差异, 也就是说, 我们所能处理的是 x 的分隔, 而实际上是辨别的是我们还不知道的 $y = f(x)$ 的大小. 因而, 这儿的估计只能作为参考而已. 以"分数法"而言, 其优点是在实验次数估计得一个不差时, 而恰巧是数到 F_n 中的一个数时, 可以比"黄金分割法"少做一次, 但如果合乎要求的数据提前来了, 也就不少做了. 如果不够而还要做下去, 就反而要多做一两次了.

在中华人民共和国普及数学方法的若干个人体会①

一 引 言

在第五届国际数学教育会议上, 我能够作为四个主讲人之一, 我个人感到光荣, 这也是中国人民的光荣. 但另一方面, 人贵有自知之明, 我的数学是自学出来的, 对于数学教育, 实践不多. 近二十年来, 我从事把数学方法交到工人和技术人员手里、为生产服务的工作, 也是一面搞理论研究、一面教学、一面在实践中摸索着做的. 这是我第一次有机会向先进的数学教育工作者学习. 在数学教育方面, 我仍然是个初学者、自学者, 许多有关数学教育的名著都没有学习过. 在我的讲话中, 如有缺点错误, 就请大家指教和纠正.

二 三 个 原 则

我从事普及数学方法的工作是从 60 年代中期开始的, 迄今我们已经到过中国的 23 个省、市、自治区, 几百个城市, 几千个工厂, 会见了成百万的工人、农民和技术人员. 从工作实践中, 我们体会到在普及数学方法时有以下三个原则:

(1) “为谁?”或“目的是什么?”

(2) “什么技术?”

(3) “如何推广?”

我现在对这三个问题简单地分析如下:

(1) 在专家与工人之间并不一定有共同语言, 要找到共同语言, 必须要有共同的目的. 决不能你想你的, 他想他的. 无穷维空间对一个数学家来说很引人入胜, 但对工人来说, 他不关心这一点. 他希望尽快地找到砂轮或锡林 (cylinder) 的平衡位置. 因此搞普及工作, 首先要找到讲者与听者间的共同目标. 有了共同目标, 就能为产生共同语言打开道路. 这样才有可能提到 (2) 选择什么技术的问题.

(2) 关于这一问题, 我以后还要比较详细地讲, 现在仅提出“选题三原则”:

① 这是华罗庚同志在第四届国际数学教育会议上的报告的修订稿, 原文是英文 (见 L. K. Hua and H. Tong, Some personal experiences in popularizing mathematical methods in the People' s Republic of China, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol; 13:4, 1982, 371~386.) 这次会议是 1980 年 8 月在旧金山召开的.

1) 群众性. 我们提出来的方法, 要让有关的群众听得懂, 学得会, 用得上, 见成效.

2) 实践性. 每个方法在推广之前都要经过实践, 通过实践去检验这个方法可以适用的范围, 然后在这个范围内进行推广, 在实践中会发现, 在国外取得成功的方法, 如果原封不动地搬到中国来, 往往也不一定能取得预期的成果.

3) 理论性. 必须有较高的理论水平, 因为有了理论, 才能深入浅出; 因为有了理论, 才能辨别方法的好坏; 因为有了理论, 才能创造新的方法.

(3) 如何推广的问题, 我们的经验是：亲自下去, 从小范围做起. 例如先从一个车间做起, 从一个项目做起. 如果一个车间做出成绩, 引起了注意, 其它车间会闻风而来, 邀请我们前去. 如果整个工厂从领导到群众大多感兴趣了, 那就可以推广到整个工厂, 一直到整个城市、整个省和自治区. 就这样, 有时我们要对几十万个听众演讲. 演讲的方法是有一个主会场, 并设若干个分会场. 我们的闭路电视还不普遍, 所以在每个分会场都有我的助手、负责演示与画图. 讲完后, 我们不仅要负责答疑, 更重要的是到现场去, 和大家一起工作、实践, 务必让讲授的方法在生产中见到效果.

三 书本上寻

作为一个学者, 往往会到文献中或书本上寻找材料. 如果能注意分析比较, 这样作不失为一个好方法, 可以从中获得不少经验和教训. 例子很多, 我仅举其中之一.

如何计算山区的表面积？我们在书上找到了两个方法：一个是地质学家的 Бауман 法, 另一个是地理学家的 Волков 法. 这些方法的叙述如下：

从一个画有高程差为 Δh 的等高线地图出发. l_0 是高度为 0 的等高线, l_1 是高度为 Δh 的等高线, $\cdots\cdots$, l_n 是制高点, 高度为 $h.W_i$ 是 l_i 与 l_{i+1} 间平面上的面积.

1) 地质学家的方法分两步：

a) 令 $C_i=\frac{1}{2}(|l_i|+|l_{i+1}|)$, $|l_i|$ 是等高线 l_i 的长度.

b) $B_n=\sum\limits_{i=0}^{n-1}\sqrt{W_i^2+C_i^2}$.

地质学家把 B_n 看作是这块山地区域面积值.

2) 地理学家的方法, 也分两步：

a) $l=\sum\limits_{i=1}^{n}|l_i|, W=\sum\limits_{i=0}^{n-1}W_i$.

b) $V_n=\sqrt{W^2+(\Delta h\cdot l)^2}$.

地理学家把 V_n 看作是这块山地区域面积值.

这是我们从不同的科学分支找来的两种方法. 当这些方法摆在我们面前的时候, 立刻就出现了两个问题: (i) 它们是否收敛于真面积? (ii) 哪个方法好些?

使人失望的是, 两个方法都不收敛于真面积 A, 确切地说, 命

$$B = \lim_{n \to \infty} B_n,\ V = \lim_{n \to \infty} V_n,$$

则得出

$$V \leqslant B \leqslant A.$$

证明是不难的, 但似乎有些趣味. 我们把曲面写成为

$$\rho = \rho(z, \theta),\ 0 \leqslant \theta < 2\pi.$$

这是以制高点为原点、高度为 z 的等高线方程, 则习知

$$A = \int_0^h \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\rho \frac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2} d\theta\ dz.$$

如果引进一个复值函数

$$f(z, \theta) = -\rho \frac{\partial f}{\partial z} + i\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2},$$

则

$$\begin{aligned} V = & \left| \int_0^h \int_0^{2\pi} f(z, \theta) d\theta\ dz \right| \leqslant B = \int_0^h \left| \int_0^{2\pi} f(z, \theta) d\theta \right| dz \\ \leqslant & A = \int_0^h \int_0^{2\pi} |f(z, \theta)| d\theta\ dz. \end{aligned}$$

我们还发现了它们取等号的可能性. 很不幸, 只有在一些非常特殊的情况下, 才取等号.

这个例子, 一方面说明了数学工作者从其他科学领域寻找问题的可能性. 另一方面, 也说明了数学理论的作用. 没有数学理论就不能识别方法的好坏. 经过理论上的分析, 我们就有可能由之而创造出更好的方法来.

找出了较好的方法, 是不是能够成为我们应该普及的材料? 不! 这个方法只要让地质地理学家们知道就够了. 也就是建议他们写书的时候改用新法或作为我们教授微积分时资料就行了.

虽然这不是我们可以推广的项目, 但我还是觉得这样的工作是必要的. 这样的材料积累多了, 就可以使我们改写教材时显得更充实, 习题可以更实际, 不是仅仅在概念上兜圈子, 或凭空地去想去难题.

四 车间里找

从一个车间或从个别工人那里得来的问题, 也有不少是很有意义的. 我在这儿举其中一个作为例子, 叫做挂轮问题.

那是 1973 年, 我们到了中国中部的洛阳市去推广应用数学方法. 洛阳拖拉机厂的一位工人给我们提出一个"挂轮问题".

用数学的语言来表达: 给定一个实数 ξ, 寻求四个介于 20 和 100 之间的整数 a, b, c, d, 使

$$\left|\xi - \frac{a \times b}{c \times d}\right|$$

最小.

这位工人给我们指出, 从机械手册所查到的数字是不精确的. 他以 $\xi = \pi$ 为例, 手册上给出的是

$$\frac{377}{120} = \frac{52 \times 29}{20 \times 24},$$

他自己找到的

$$\frac{2108}{671} = \frac{68 \times 62}{22 \times 61}$$

要比手册上的好. 他问还有比这更好的吗?

这是 Diophantine 逼近问题, 粗看起来容易, 用连分数有可能解决这个问题. 或许从 π 的渐近分数

$$\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \cdots$$

中能找到一个数比这位工人找出的数更好? 可是不行! $\frac{355}{113}$ 以前的分数太粗糙, 不比他的好. 以后的分子分母都超过 100^2, 不合要求. 113 是素数, 不能分解为 $c \times d$. 这个问题竟成了棘手的问题. 怎么办?

时间仅有一天! 在我离开洛阳的时候, 在火车站给我的助手写了一张小纸条:

$$\boxed{\frac{377}{120} = \frac{22+355}{7+113}}$$

我的助手看了这小纸条, 知道我建议他用 Farey 中项法.

我的助手用这方法, 又找出两个更好的分数.

$$\frac{19 \times 355 + 3 \times 333}{19 \times 113 + 3 \times 106} = \frac{7744}{2465} = \frac{88 \times 88}{85 \times 29}$$

及

$$\frac{11 \times 355 + 22}{11 \times 113 + 7} = \frac{3927}{1250} = \frac{51 \times 77}{50 \times 25}$$

最后一个分数是最好的.

上面是以 π 作为例子, 但得出来的方法可以用来处理任意的实数. 根据这个方法我们发现工程手册上有好些 a、b、c、d 并不是最好的, 并且还有漏列. 我在此顺便一提: 我们可以根据这些经验去帮助编写工程手册的单位和人员, 改进他们手册的质量.

找到这个方法, 是否能作为我们推广普及的材料? 虽然需要这方法的人比算山区表面积的人多些, 但用"挂轮计算"的毕竟还是工人中的极少数, 而且, 如果工程手册改进了, 也就可以起到同样的作用. 于是"选题"问题还需要多方探讨.

五 优 选 法

来回调试法是我们经常用的方法. 但是怎样的来回调试最有效? 1952 年 J.Kiefer 解决了这一问题. 由于和初等几何的黄金分割有关, 因而称为黄金分割法. 这是一个应用范围广阔的方法, 我们怎样才能让普通工人掌握这个方法并用于他们的工作中?

我们讲授的方法是 (先预备一张狭长纸条)

1) 请大家记好一个数字 0.618.

2) 举例说: 进行某工艺时, 温度的最佳点可能在 1000 ℃ ~2000 ℃之间. 当然, 我们可以隔一度做一个试验, 做完一千个试点之后, 我们一定可以找到最佳温度. 但要做一千次试验.

3) (取出纸条) 假定这是有刻度的纸条, 刻了 1000 ℃到 2000 ℃. 第一个试点在总长度的 0.618 处做, 总长度是 1000, 乘以 0.618 是 618, 也就是说第一点在 1618 ℃做, 做出结果记下.

4) 把纸条对折, 在第一试点的对面, 即点② (1382 ℃) 处做第二试验.

比较第一、二试点结果, 在较差点 (例如①) 处将纸条撕下不要.

5) 对剩下的纸条, 重复 4) 的处理方法, 直到找出最好点.

用这样的办法, 普通工人一听就能懂, 懂了就能用. 根据上面第二部份提出的"选题三原则", 我们选择了若干常用的优选方法, 用类似的浅显语言向工人讲授.

对于一些不易普及但在特殊情况下可能用上的方法, 我们也作了深入的研究.

例如 1962 年提出的 DFP 法 (Davidon-Fleteher-Powell). 声称收敛速度是

$$|x^{(k+1)}-x^*|=o(|x^{(k)}-x^*|),$$

我们曾指出此法的收敛速度还应达到

$$|x^{(k+n)}-x^*|=o(|x^{(k)}-x^*|^2).$$

1979 年我们在西欧才得知 W. Burmeister 于 1973 年曾证明了这结果. 但是我们早在 1968 年就给出了收敛速度达到

$$|x^{(k+1)}-x^*|=o(|x^{(k)}-x^*|^2)$$

的方法. 这方法比 DFP 法至少可以少做一半试验.

六 分 数 法

有时客观情况不是连续变化的. 例如一台车床, 只有若干档速度. 这时候, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$ 似乎难以用上, 但连分数又起了作用. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的渐近分数是

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \frac{8}{13},\ \cdots,\ \frac{F_n}{F_{n+1}},\ \cdots$$

这儿的 $\{F_n\}$ 是 Fibonacci 数, 由 $F_0=1,\ F_1=1$ 及 $F_n+F_{n+1}=F_{n+2}$ 来定义. 这个方法, 我们是利用“火柴”或零件, 在车床旁向工人们讲述的.

例如, 一台车床有 12 档

①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫

我们建议在第⑧档做第一个试验, 然后用对称法, 在⑤做第二个试验, 比比看哪个好. 如果⑧好, 便甩掉① ~ ⑤而留下

⑥⑦⑧̇⑨⑩⑪⑫

(不然, 则留下

①②③④⑤̇⑥⑦)

再用对称法, 在⑩处做试验. 如果还是⑧好, 则甩掉⑩⑪⑫, 余下的是

⑥⑦$\dot{⑧}$⑨

再用对称法在⑦处做试验, 如果⑦好, 便留下

⑥$\dot{⑦}$

最后在⑥处做试验, 如果⑥较⑦好, 则⑥是十二档内最好的一档, 我们就在⑥档上进行生产.

这种方法易为机械加工工人所掌握.

七　黄金数与数值积分

$\theta=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 称为黄金数, 不但在黄金分割上有用, 它在 Diophantine 逼近上也占有独特的地位. 因而启发我想到以下的数值积分公式:

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dx\,dy\sim\frac{1}{F_{n+1}}\sum_{t=1}^{F_{n+1}} f\left(\left\{\frac{t}{F_{n+1}}\right\},\left\{\frac{tF_n}{F_{n+1}}\right\}\right)$$

这是用单和来逼近重积分的公式, 这儿 $\{\xi\}$ 表 ξ 的分数部分.

如何把这个方法推广到多维积分呢? 关键在于我们要认识到 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 是什么? 它是分单位圆为五份而产生的, 也就是从

$$x^5=1$$

即

$$x^4+x^3+x^2+x+1=0$$

中, 令 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 而得到 $y^2+y-1=0$, 解之, 得 $y=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, 也就是 $y=2\cos\dfrac{2\pi}{5}$. 这是分圆数, 既然分圆为 5 份的 $2\cos\dfrac{2\pi}{5}$ 有用处, 那么分圆为 p 份的

$$2\cos\frac{2\pi l}{p},\ 1\leqslant l\leqslant\frac{p-1}{2}=s$$

是否能用来处理多维的数值积分? 此处 p 表示奇素数.

Minkowski 定理早已证明有 $x_1,\cdots,x_{s-1}$ 及 y, 使

$$\left|2\cos\frac{2\pi l}{p}-\frac{x_l}{y}\right|\leqslant\frac{s-1}{sy^{s/s-1}}.$$

但 Minkowski 的证明是存在性证明, 对于分圆域 $\mathbf{R}\left(2\cos\dfrac{2\pi}{p}\right)$ 而言, 因为有一个独立单位系的明确表达式, 所以能够有效地找到 $x_1,\cdots,x_{s-1}$ 与 y, 因此可用

$$\left(\left\{\frac{t}{y}\right\},\left\{\frac{tx_1}{y}\right\},\cdots,\left\{\frac{tx_{s-1}}{y}\right\}\right),\ t=1,\cdots,y$$

来代替
$$\left(\left\{\frac{t}{F_{n+1}}\right\},\ \left\{\frac{tF_n}{F_{n+1}}\right\}\right),\ t=1,\ \cdots,\ F_{n+1}.$$
这不但可以用于数值积分, 而且凡用随机数的地方, 都可以试用这点列.

八 统筹方法

教学改革既要帮助学生扩大知识面, 还要有促进社会生产发展的作用. 以上介绍的优选法的例子既便于普及, 又是改进生产工艺的好方法. 另外, 质量控制是在出了次品、废品后, 不让它们出厂, 从而保持本厂产品质量荣誉的方法, 但是, 与其出了废品后再处理, 不如先用优选法找到最好的生产条件而减少废品率. 这样, 再用质量控制把关也就比较轻而易举了.

在生产中, 除了生产工艺的管理问题外, 还有生产组织的管理问题. 处理这类问题所用的数学方法, 我们称之为统筹方法 (或统筹学).

统筹学中也有许多好方法, 可以进行普及, 仅举几例.

(1) CPM 法

我们开始普及时, 为了容易接受起见, 而把让工期缩到最短作为目标. 但是, 一旦大家学会了这个方法, 就会懂得去搞投资最少及人力、资源平衡等较为复杂的问题. CPM 是什么, 大家都已知道了, 我只准备介绍我们是怎样工作的.

我们的第一原则是根据实际工程, 使技术人员或工人学会这一方法, 步骤是

(i) 调查. 调查三件事: a) 组成整个工程的各个工序; b) 各工序之间的衔接关系; c) 每道工序所需的时间, 要做好这一条, 一定要注意依靠生产第一线的工人和技术人员, 他们的估计比起上层的技术人员的估计更切合实际.

(ii) 依据这些材料, 使大家学会画出草图, 再教会大家找关键路线的方法, 然后大家讨论, 献计献策, 努力缩短工期, 定出计划, 画出 CPM 图.

(iii) 注意矛盾转化. 在工程进行过程中, 经常会有提前或延期完成的现象, 因此关键路线不会一成不变. 我们就要经常注意变化的情况, 给有关工段下指示.

(iv) 总结. 在工程完成后, 依照实际的进度重画 CPM 图, 这样可以把这次的经验记录下来, 作为下次施工的参考.

我们体会到, 这一方法宜小更宜大, 或者从基层工段做起, 逐步汇成整个工程的 CPM 图. 或从全局着眼, 先拟制一个粗线条的计划, 然后由基层单位拟订自己的 CPM 图, 再综合起来, 大家讨论修改.

(2) 序贯分析 (sequencing analysis)

如果有若干工程 (每个工程各有时间估计, 或可用 CPM 估出), 可以任意安排先后次序施工, 如何安排次序, 使总的等待时间最短.

在解决这一问题之前, 先讲一个数学问题.

有两组非负数

$$a_1, \cdots, a_n;$$
$$b_1, \cdots, b_n.$$

怎样的次序使

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

最小, 或最大? 答案是: “a” 与 “b” 同序时最大, 逆序时最小, 证明是容易的, 从下面最简单的情况, 不难推出最一般的结果.

若 $a_1 \leqslant a_2$, $b_1 \leqslant b_2$, 则

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \geqslant a_1 b_2 + a_2 b_1,$$

即 $(a_2 - a_1)(b_2 - b_1) \geqslant 0$. 一般来说, 和中若有一个不同序处, 则改之为同序后, 和数更大.

再用通俗的话来讲: 有一个水龙头, 有 n 个容量分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的水桶, 依怎样的次序安排才能使总的等待时间最短? 第一桶注满的时间是 a_1, 第二桶是 $a_1 + a_2$, $\cdots$, 所以总的等待时间是

$$\begin{aligned} &a_1 + (a_1 + a_2) + \cdots + (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \\ &= n a_1 + (n-1) a_2 + \cdots + 2 a_{n-1} + a_n. \end{aligned}$$

它当 “a” 依 $b_1 = n$, $b_2 = n - 1$, $\cdots$, $b_n = 1$ 的反向排列时最小, 即

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n.$$

也就是容量小的先灌.

如果有 s 个水龙头, 第一个水龙头上的水桶容量次序为 $a_1^{(1)}$, $\cdots$, $a_m^{(1)}$. 第二个是 $a_1^{(2)}$, $\cdots$, $a_m^{(2)}$, $\cdots$. 因此总等待时间是

$$\sum_{j=1}^{s} (m a_1^{(j)} + (m-1) a_2^{(j)} + \cdots + a_m^{(j)})$$

(我们不排除有些 $a_t^{(j)} = 0$).

命

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_s = m,$$
$$b_{s+1} = b_{s+2} = \cdots = b_{2s} = m - 1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

便得出结论：仍然是“小桶先灌”.

(3) 上面两段初等介绍，使大家对多工程，总安排有了初步认识. 然后再向负责组织管理的人提供当前他们所用得着的方法.

(4) 另一个可以普及的方法是关于运输调配的图上作业法. 有 n 个小麦产地 $a_1, \cdots, a_n$, 各生产麦子 $A_1, \cdots, A_n$(吨), 要运往 m 个消费点, 各需要麦子 $B_1, \cdots, B_m$. 要求运输的吨公里数最小. 这问题当然可以用线性规划来处理. 但我们往往用较简单的图上作业法. 这个方法的原则是：利用交通图, 消灭对流和迂回.

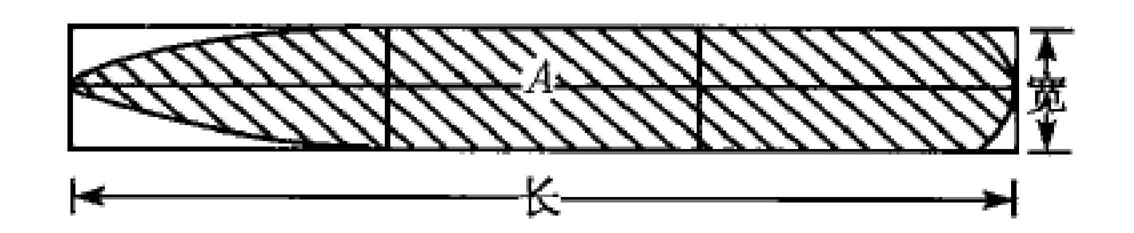
九　统计方法

(1) 经验公式及数学见识的重要性.

经验公式往往从许多统计数据归纳而得, 具有广博知识和一定数学修养的科学家很容易看出某个经验公式的意义. 举个例子, 印度数量统计学家 R. C. Bose 分析了印度稻叶的大量样本, 得出一个计算稻叶面积 A 的经验公式

$$A = \frac{\text{长} \times \text{宽}}{1.2}.$$

我不怀疑此公式的可靠性. 一些中国农学家应用相同的公式去估计他们的稻子试验田的产量, 我看了他们稻田里叶子的形状后, 便立刻指出这公式不适合他们的稻叶. 他们采集了一些稻叶样本来测量, 果然发现这公式估计的面积比实际稻叶面积大. 他们很奇怪, 我画了下面的一个图向他们解释：



阴影部分表示叶片的面积.

在这种情形下, 长方形面积与 A 的比近似为 6/5 即 1.2. 但在他们的试验田里, 叶片的形状更为狭长. 我又画了另一个图：

这时, 长方形面积与 A 的比当然大于 1.2 了. 很容易解释为什么用 Bose 的公式会高估了他们稻叶的面积.

由此, 我们得到了很好的教训：一个经验公式的数学背景是非常重要的.

(2) 简便统计

在实验科学中我们常常应用统计方法, 当然不能否认, 这些方法是重要的. 然而, 我个人认为某些方法太复杂繁琐, 而且很容易被滥用、误用. 先举一些例子.

例 1　某一试验独立地重复了 20 次, 以 $x_1, \cdots, x_{20}$ 表示观察值. 命

$$\bar{x} = (x_1 + \cdots + x_{20})/20, \text{ (均值)}$$

$$s = \sqrt{\sum_{w=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2/19}. \text{ (标准离差)}$$

这时, 做实验的人可以声称: 观察值落在区间 $(\bar{x} - 1.73s/\sqrt{20}, \bar{x} + 1.73s/\sqrt{20})$ 的置信概率为 0.9. 这样复杂的方法似乎不易为中国的普通工人所理解, 此处, 基本的 Gauss 假设很可能不成立!

实际上, 我倾向于用如下的简便方法.

将观察值排好次序, 记为

$$x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant x_{(20)}$$

我们可以如实地说, 试验值落在 $\left(\frac{x_{(1)} + x_{(2)}}{2}, \frac{x_{(19)} + x_{(20)}}{2}\right)$ 的可能性大于 18/20= 90%.

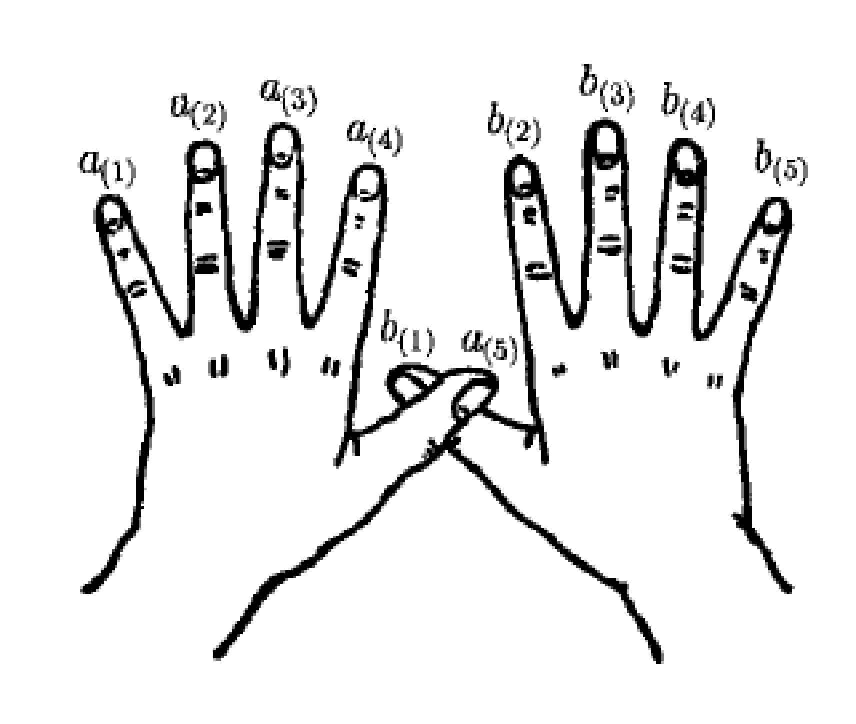
例 2　假如有两种生产方法, 每种方法有 5 个观察值, 要求检验哪种方法较好. 以 $\{a_1, \cdots, a_5\}$ 与 $\{b_1, \cdots, b_5\}$ 分别表示第一法与第二法的观察值. 我们可以借助于通常的 student 分布, 试一试比较两者的均值. 但要知道, 用这样一个复杂的办法, 要基于一系列的假设, 诸如正态性、同离差、独立性等等. 对于这些东西, 普通工人是不容易理解的.

有一个更为可靠的简便方法, 它只基于有序样本 $a_{(1)} > a_{(2)} > \cdots > a_{(5)}$ 和 $b_{(1)} > \cdots > b_{(5)}$ 的比较, 可能更适于在中国推广. 举例说, 如果将两组样本混起来比较次序, 有

$$a_{(1)} > a_{(2)} > a_{(3)} > a_{(4)} > b_{(1)} > a_{(5)} > b_{(2)} > b_{(3)} > b_{(4)} > b_{(5)}$$

或　$$a_{(1)} > a_{(2)} > a_{(3)} > a_{(4)} > a_{(5)} > b_{(1)} > b_{(2)} > b_{(3)} > b_{(4)} > b_{(5)}$$

我通常伸出两只手、两只大拇指互相交叉, 用以说明前者:



即使是普通工人也很容易明白：不能说两种生产方法一样好. 进一步讲, 两组样品有 $5\times5=25$ 种比较关系, 除了 $b_{(1)}>a_{(5)}$ 外, “a”都大于“b”. 所以“第一种生产方法比第二种好”有 $\dfrac{24}{25}=96\%$ 的可能性.

(3) PERT

考虑 Program Evaluation Review Technique(PERT). 假如在表示某工程的网络中共有 N 个活动, 描述第 i 活动持续时间的基本参数有三个. 以 a_j, b_j 和 c_j 表示“乐观时间”、“最可能时间”和“悲观时间”. 第 i 个活动的持续时间通常假定是服从 beta 分布 (在 $(a_j,\ c_j)$ 上), 具有平均持续时间 m_j,

$$m_j=(a_j+4b_j+c_j)/6$$

并且有离差 $$(b_i-a_i)^2/36$$

整个工程所需总时间的概率分布是否可用 Gauss 分布来近似? 对这个问题仍然有争议. Causs 分布的前提是中心极限定理 (CLT). “服从 beta 分布”这个假设本身已有争论, 即使不计及这点, 能否草率地应用 CLT, 还很有疑问.

(4) 试验的设计

我认为, 迄今为止还没有给予非线性设计足够的重视, 过去偏重于线性模型的研究, 却掩盖了一个重要的事实：这些模型往往不符合现实.

我们需要不断改进模型, 使之更接近现实. 当然, 我们也懂得任何模型都不是实体, 不能指望有一个完全符合现实的模型.

(5) 分布的类型

有人一直主张用 Pearson III型分布去模拟“特大”洪水间隔时间的分布. 在这个问题中, 数据本来就少得可怜, 因而用III型分布是否符合事实? 是否明智? 都值得怀疑. 更不用说从这模型去预测下一次大洪水到来的时间了.

十 数学模型

(1) 矩阵的广义逆

考虑 y 关于 $x_1,\ \cdots,\ x_p$ 的一般回归模型,

$$y=f(x_1,\ \cdots,\ x_p)+e.$$

这里 e 表示随机“误差”项. 以 $y^{(i)}$ 表示 y 在 $x_1^{(i)},\ x_2^{(i)},\ \cdots,\ x_p^{(i)}$ 的观察值. 若假定 f 是线性的, 且有 $n(>p)$ 个观察值, 那么

$$y^{(i)}=\sum_{j=1}^{p}\theta_j x_j^{(i)}+e^{(i)}, i=1,\cdots,n. \tag{1}$$

估计 $\theta_1,\cdots,\theta_p$ 的一般方法是令 $\sum_{i=1}^{n}[e^{(i)}]^2$ 关于 θ_j 达到最小值. 亦即使 $Q(\underset{\sim}{\theta})=(\underset{\sim}{y}-\underset{\sim}{M}\,\underset{\sim}{\theta})'(\underset{\sim}{y}-\underset{\sim}{M}\,\underset{\sim}{\theta})$ 关于 $\underset{\sim}{\theta}$ 达最小值, 此处

$$\underset{\sim}{y}=[y^{(1)},\cdots,y^{(n)}]',$$

$$\underset{\sim}{M}=\begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \cdots & x_p^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \cdots & x_p^{(n)} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\theta}=(\theta_1,\cdots,\theta_p)'.$$

为简单起见, 可以假定 $\underset{\sim}{M}$ 是 p 阶的, 那么

$$\begin{aligned} Q(\underset{\sim}{\theta}) =&[\underset{\sim}{\theta}-(\underset{\sim}{M}'\,\underset{\sim}{M})^{-1}\,\underset{\sim}{M}'\,\underset{\sim}{y}]'\,\underset{\sim}{M}'\,\underset{\sim}{M}[\underset{\sim}{\theta}-(\underset{\sim}{M}'\,\underset{\sim}{M})^{-1}\,\underset{\sim}{M}'\,\underset{\sim}{y}] \\ &+\underset{\sim}{y}'[I-\underset{\sim}{M}(\underset{\sim}{M}'\,\underset{\sim}{M})^{-1}\,\underset{\sim}{M}']\,\underset{\sim}{y}=S_1+S_2, \end{aligned}$$

因为 $S_1\geqslant 0$, 所以置

$$\underset{\sim}{\theta}=(\underset{\sim}{M}'\,\underset{\sim}{M})^{-1}\,\underset{\sim}{M}'\,\underset{\sim}{y} \tag{2}$$

可使 $Q(\underset{\sim}{\theta})$ 达到最小值, 有时候, (2) 被看作是方程

$$\underset{\sim}{y}=\underset{\sim}{M}\,\underset{\sim}{\theta} \tag{3}$$

的广义解. 因之 $(\underset{\sim}{M}'\,\underset{\sim}{M})^{-1}\,\underset{\sim}{M}'$ 被称作 $\underset{\sim}{M}$ 的**广义逆**.

当然, 如果模型是线性的, 那么 (2) 是正确解. 但是, 如果将 (2) 代入方程 (3) 后, y 的“观察值”和“预测值”之间出现本质上的差异, 那么就得放弃线性的假定了.

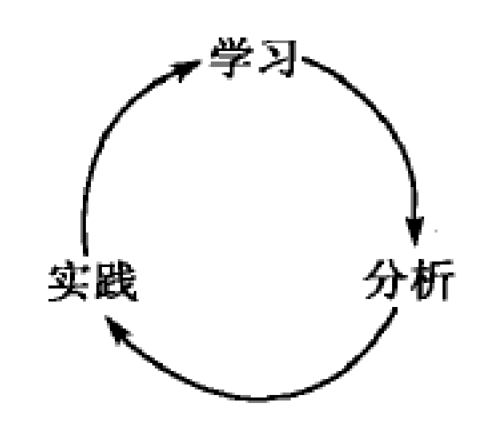
有许多例子是将本质上非线性的问题当成线性去求解的. 广义逆的应用只不过是其中之一, 另外一些例子有线性规划、正交设计等.

(2) 非负矩阵

因为许多经济学上的变量都是非负的, 我认为非负矩阵的理论, 很适用于分析经济关系. 我也相信, 在建立中国经济的数学模型时, 这一理论会很起作用.

十一 结 语

如果要我用几句话说明我在最近十五年来推广数学方法中学到了什么？我会毫不犹豫地回答, 从中我学会了一个螺旋上升的过程:



附录 应用数学①

中国科学院应用数学小组分队

在过去的二十年里, 华罗庚教授在继续纯数学的理论研究之外, 又大力从事于数学方法对于国民经济的应用. 他领导了一个由数学工作者, 技术人员和工人所组成的小分队, 到过全国二十三什省市, 下到成千上万个工厂去进行普及推广工作. 用这种办法, 他成功地把许多有用的数学方法直接交到普通工人师傅手里, 并应用在生产上取得了显著的经济效果. 他在这项工作上所花的时间和精力, 毫无疑问, 不比他的纯数学的任何一个领导里所花的来得少. 由于这个原因, 我们觉得在这本选集中应当收进一个说明他在这方面的贡献的简表. 由于这种成果遍及于许多不同的行业和部门, 所以不可能详细地一一叙述它们.

纺织

1. 提高 2014 纱卡的质量.
2. 解决美丽绸退发的问题.
3. 提高织机的效率.
4. 提高细纱的单产.
5. 提高涤棉布热定型的效率.
6. 减少细纱的断头率.
7. 改进滚筒表面的状况, 减少缠纱的现象.
8. 锡林动平衡问题.
9. 提高染色质量, 节约原材料.

电子

1. 试制新的 160V 电容器.
2. 100 万米废钼丝复活.
3. 提高晶体管防潮漆的抗潮性能.
4. 调试 XD_1 信号发生器的功率放大器.

① 原载 Loo-Keng Hua, Selected papers .Springer-Verlag, 1983.

5. 解决 BP-3 宽频谱分析仪的源电压波动问题.
6. 回收稀有金属钽.
7. 提高在制造钽电解电容器中钽粉的利用系数.
8. 改进单晶硅衬底的质量.
9. 控制铝膜的厚度.
10. 高纯铝箔的退火.
11. 提高点腐蚀工艺的质量.

冶金

1. 提高球磨机的效率.
2. 改进浇铸 H80 焊条钢中铝封顶的效果.
3. 克服熔炼 Si-Cr 硅铬合金中的技术障碍.
4. 减少电炉炼钢的时间.
5. 提高 2Cr13 不锈钢的质量.
6. 提高钴的产量.
7. 提高钛的产量.
8. 改进硅钢片涂层的质量.
9. 提高三辊冷轧管机的产量.
10. 减少 $\phi500$ 轧机的废品率.
11. 提高金属锰的回收率.
12. 解决由于钢锭收缩产生的孔隙的问题.
13. 延长炉龄.

煤矿

1. 合理安排, 提高煤的产量.
2. 调整联合采煤机的参数, 提高机器效率.
3. 减少炸药消耗, 提高采煤工作面的单产.
4. 提高精煤回收率.
5. 提高圆环锚链和连接环的破裂强度.

电力

1. 恢复汽轮发电机组的输出.
2. 提高锅炉的效率.
3. 改变工业供水系统.
4. 调优供水泵的运行.
5. 实现在开机并列时的自动频率调节.
6. 降低汽轮机轴承的温度.
7. 提高移动床软化水的效率.

通讯和交通

1. 组织铁路施工.
2. 提高车站的装卸率.
3. 降低车船的燃料 (油料) 消耗.
4. 改进气象导航.
5. 组织泸州长江大桥的施工建设.

建筑和建材

1. 建筑工程的组织.
2. 建筑工程的预算.
3. 桥梁工程的组织.
4. 提高纤维板的产量.
5. 降低聚氯乙烯胶泥的成本.
6. 提高混凝土预制板的产量.
7. 提高水磨石制品的质量.
8. 提高膨胀珍珠岩的膨胀系数.
9. 降低矿渣混凝土的成本.
10. 试制多硫化钙溶液.
11. 提高离心浇注混凝土管的效率.

食品、粮油加工

1. 提高大米加工中的出米率.
2. 提高油料加工中的出油率.
3. 提高小麦加工中的出粉率.
4. 提高酿酒工艺中的出酒率.
5. 提高糖的回收率.
6. 提高饴糖的产量.
7. 降低细挂面的再加工率.
8. 提高由麦芽制糖的出糖率.
9. 提高豆腐质量, 降低大豆消耗.
10. 提高糖果的质量.
11. 提高猪毛溶解工艺中蛋白的得率.

设计

1. 设计无线电网络.
2. 设计滤波器.
3. 设计补偿器.
4. 在给定地形上的机场的设计.

5. 光学设计.
6. 行星齿轮的设计.
7. 无线电发射机的频带的设计.
8. 电路开关的设计.
9. 水样采集器的设计.
10. 多级提水站的位置的设计.

化工

1. 提高液晶对温度变色的灵敏度.
2. 提高癸二酸的质量.
3. 提高叉氰胺的回收率.
4. 提高活性炭的产量和质量.
5. 延长辛烯醛加氢 (触媒) 反应中催化剂的寿命.
6. 在锆氟酸钾生产中, 节约原料硅氟酸钾.
7. 提高抗氧剂 1010 的回收率.
8. 改进精馏塔的分离系数.
9. 提高糠醛的产率.
10. 提高苛性碱的回收率.
11. 增加来苏尔的产量.
12. 在硫化碱的生产中, 提高产量, 节约原材料.
13. 减少电能消耗, 增加碳化钙的产量.
14. 增加造粒塔的产量.
15. 增加气体发生器的产气量.
16. 增加磷肥的产量.

石油

1. 提高破乳剂 GP122 的效能.
2. 提高原油脱水的质量.
3. 提高在常减压加工中, 减压塔的总产率.
4. 计算油井的最大产能.
5. 提高化学清腊中的溶腊率.
6. 优选锅炉运行的最佳条件.
7. 降低厚油的粘性.
8. 选择地震资料基地的回放仪滤波因素.
9. 增加微球硅化铝 (催化剂) 的产量.
10. 用铂重整法试炼新油种.
11. 提高抗凝剂 605 的质量.

轻工业

1. 提高热水瓶的质量.
2. 增加肥皂的产量.
3. 提高纸张的质量.
4. 提高鞣制皮革的质量.
5. 增加皮鞋的产量.
6. 提高 10W 萤光灯光效.
7. 增加卷烟的产量.
8. 提高罐头内涂料的质量.
9. 提高鸭绒分离机的效率.
10. 利用干枯变质木材生产火柴.
11. 提高锦纶丝的产量.
12. 增加特种甘油的产量.
13. 改进 TiF_2 玻璃的质量.

机械制造

1. 提高各类机床的加工效率和精度.
2. 挂轮间的最优逼近.
3. 砂轮的静平衡.
4. 提高落地镗床镜面标尺的光洁度.
5. 提高球墨铸铁的质量.
6. 提高法兰盘加工的质量.
7. 快速镀铬.
8. 提高电泳镀漆的质量.
9. 各类切削工具的淬火工艺.
10. 齿轮平面表面的高频淬火工艺.
11. 振动膜的热处理.
12. 不开坡口单层双面埋弧自动焊接.
13. 用 3S 铬钼钒加工钻头.
14. 氧气瓶的收口成型.
15. 无氰镀锌工艺.
16. 降低高炉的焦铁比.

制药

1. 优选酰化反应时间增加扑热息痛的产量.
2. 提高海带提取碘的得率.
3. 降低磺胺嘧啶的成本.

4. 增加敌百虫农药的产量.
5. 改进四环素的压片工艺.
6. 提高甲醇钠的产量.
7. 提高土霉素盐酸盐的回收率.
8. 在呋喃类药物生产中, 节约原料.
9. 提高磺胺嘧啶的发酵指数.



优选学

第一部分 单因素优选法

我们常假定 $f(x)$ 是定义在区间 (a,b) 的单峰函数, 但 $f(x)$ 的表达式是并不知道的, 只有从试验中才能得出在某一点 x_0 的数值 $y_0=f(x_0)$. 我们的问题是: 用尽量少的试验次数来确定 $f(x)$ 的最大值的近似位置.

最简单的方法是穷举法或称均分法, 即在 n 个点

$$x_l=a+\frac{l}{n+1}(b-a)(l=1,2,\cdots,n)$$

做试验得 $y_l=f(x_l)$, 其中最大的一个是 y_m, 则我们知道最大值在区间

$$\left[a+\frac{m-1}{n+1}(b-a),a+\frac{m+1}{n+1}(b-a)\right]$$

中取, 也就是做 n 次试验可以确定最大值在长度等于

$$\frac{2}{n+1}(b-a)$$

的区间中取, 如果预先给了精密度 ε, 则试验次数 n 必须适合于

$$\frac{2}{n+1}(b-a)<\varepsilon$$

才能达到目的, 即:

$$n+1>\frac{2(b-a)}{\varepsilon}$$

所需要做的试验次数是数量级是 $\frac{1}{\varepsilon}$ 才能达到目的.

以后所讲的黄金分割法及分数法, 所需要的次数的数量级只要 $\log\frac{1}{\varepsilon}$, 大大改进了以上的结果, 而抛物线法所需要的次数的数量级只要 $\log\log\frac{1}{\varepsilon}$, 又进一步改进了黄金分割法的结果.

就试验的次数来说, 方法一个精似一个, 但这几个方法都是有序贯性的, 即必须利用上一次试验的结果, 才能决定下一次做试验的地点, 这样做可以节省试验的次数, 节省人力、物力及试验费用消耗. 但是, 可能要拉长时间, 如果条件许可 (例如有多套试验设备), 我们可以用第三章所介绍的方法 —— 一批做几个试验的方法.

黄金分割法和分数法

述　　要

《优选法平话》一书介绍过 0.618 法. 0.618 是

$$w=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.6180339887\cdots$$

的四位有效近似值, 它适合于方程

$$w^2+w-1=0.$$

黄金分割法也就是先在

$$x_1=a+(b-a)w$$

处做一次试验, 再在 x_1 的对称点

$$x_2=b-(b-a)w=a+(b-a)w^2$$

做一次试验, 比较试验结果 $y_1=f(x_1)$ 及 $y_2=f(x_2)$ 哪个大. 如果 $f(x_1)$ 大, 就去掉 (a,x_2), 在留下的范围 (x_2,b) 中已有了一个试验点 x_1, 然后再用以上的求对称点的方法做下去. 如果 $f(x_2)$ 大, 则去掉 (x_1,b), 在留下的范围 (a,x_1) 中已有一试验点 x_2, 同样用求对称点的方法做下去, 一直做到所需要的精密度为止.

在介绍分数法之前, 引进数列

$$F_0=1,\quad F_1=1,\quad F_n=F_{n-1}+F_{n-2}(n\geqslant 2),$$

即为

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,\cdots.$$

第 n 级的分数法以

$$\frac{F_n}{F_{n+1}}$$

代替黄金分割法的 $w=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, 做了 n 次试验后, 知道最大值在长度为 $\dfrac{2}{F_{n+1}}$ 的区间中, 因此, 给了精密度 ε, 取 n 使

$$F_{n+1}\geqslant\frac{2}{\varepsilon}>F_n,$$

则用第 n 级的分数法做 n 次试验就可以达到要求.

有限点的问题——分数法

不妨假定所考虑的区间就是 $[0,1]$, 在 m 个点 x_i

$$0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_m < 1$$

处可以做试验. 问题: 至少要做几次试验可以找到 $f(x_i)(1 \leqslant i \leqslant m)$ 中最大的一个? 或者我们至少要做几次试验, 怎样安排, 可以从最多的点数中找到取最大值的点来?

令 $m = \Phi_n = \Phi(n)$ 是 n 次试验可分辨的最多点数, 也就是在 $m = \Phi(n)$ 个点中, 可以做 n 次试验找到一个 x_i, 使 $y_i = f(x_i)(1 \leqslant i \leqslant m)$ 为最大. 而超过 Φ_n 个点, 我们就无法用 n 次试验找出取最大值的点了.

首先, 做一次试验 $(n=1)$, 只能分辨一个点, 因此 $\Phi_1 = 1$. 做二次试验 $(n=2)$, 只能在两个点中分辨, 因此 $\Phi_2 = 2$.

考虑一般的情况: 在 $\Phi_n = \Phi(n)$ 个点中已做了两次试验①, ②如下图:

$$\underbrace{\circ\circ\cdots\circ}_{a}①\underbrace{\circ\circ\cdots\circ}_{b}②\underbrace{\circ\circ\cdots\circ}_{c}$$

即在 a 个点之后做一次试验①, 再在 b 个点之后做一次试验②, 还余 c 个点, 则得

$$\Phi_n = a + b + c + 2. \tag{1}$$

如果①的试验结果比②好, 则最好值一定在

$$\underbrace{\circ\circ\cdots\circ}_{a}①\underbrace{\circ\circ\cdots\circ}_{b}$$

中, 连①在内, 在其中共可做 $n-1$ 次试验, 可分辨的点数最多为 Φ_{n-1}, 因此

$$a + b + 1 \leqslant \Phi_{n-1}. \tag{2}$$

又在前面 a 个点中最多只能再做 $n-2$ 次试验, 所以

$$a \leqslant \Phi_{n-2}. \tag{3}$$

同样, 如果②点比①点好, 则应当有

$$b + c + 1 \leqslant \Phi_{n-1}. \tag{4}$$

综合 (1), (2), (3), (4), 得

$$\Phi_n \leqslant \Phi_{n-1} + \Phi_{n-2} + 1. \tag{5}$$

当且仅当 (2), (3), (4) 均为等式时等号成立. 即当安排方法符合条件

$$a = c = \Phi_{n-2}(\text{对称性}), \tag{6}$$

$$a + b + 1 = b + c + 1 = \Phi_{n-1}$$

时才能使可分辨的点数最多. 这时

$$\Phi_n = \Phi_{n-1} + \Phi_{n-2} + 1. \tag{7}$$

改写成递归公式

$$\Phi_1 = 1, \Phi_2 = 2, \Phi_n + 1 = (\Phi_{n-1} + 1) + (\Phi_{n-2} + 1). \tag{8}$$

令 $F_{n+1} = \Phi_n + 1$, 则得

$$F_2 = 2, F_3 = 3, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}(n = 4, 5, \cdots).$$

如果定义 $F_0 = F_1 = 1$, 上面的递归公式可写为

$$F_0 = F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}(n = 2, 3, \cdots). \tag{9}$$

结论: 做 n 次试验顶多可以分辨出 $(F_{n+1} - 1)$ 个点中取最大值的那一点. 安排方法是先在第 F_n 点处做试验, 再在其对称点 (即第 $F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$ 点) 处做试验, 如果左边的试验点好, 去掉第 F_n 点及以右各点, 余下 $(F_n - 1)$ 个点, 依法进行下去:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\circ\circ\cdots\circ}_{F_{n-2}}\times\circ\cdots\circ}_{F_{n-1}}\times\circ\circ\cdots\circ}_{F_n-1}$$

如果这 $(F_{n+1} - 1)$ 个点在 (0,1) 中是均匀的, 即均分 (0,1) 为 F_{n+1} 等分, 经过 n 次试验, 最后余下长度为 $\dfrac{2}{F_{n+1}}$ 的区间, 在 (0,1) 中取最大值的点一定在这区间中, 试验安排是, 第一试验点在 F_n/F_{n+1} 处, 以后取它的对称点, 这就是第 n 级分数法. 另一方面, 做了 n 次试验以后, 如果试验点恰好是余下区间的中点, 再用取对称点的方法就不行了. 也就是说, 用第 n 级分数法, 最多只能做 n 次试验.

F_n 的解析表达式

能不能直接算出 F_n 来, 也就是求适合于

$$F_0 = F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}(n \geqslant 2)$$

的 F_n 的一般表达式

我们证明：它们能表达为

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\} (n = 0, 1, 2, \cdots). \quad (1)$$

当 $n = 0$ 时, 此式显然成立.

当 $n = 1$ 时, 由于

$$\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+\pm\sqrt{5}}{2},$$

所以, $F_1 = 1$ 也成立.

只要注意到

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\\ =&\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}+1\right)\\ =&\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right)\\ =&\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1},\end{aligned}$$

便有

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

由归纳法证明了公式 (1).

这里的证明是假定了已知公式 (1), 再用归纳法来证明的. 如果不知道公式 (1), 如何导出这公式?

令

$$f(x) = F_0 + F_1x + F_2x^2 + \cdots + F_nx^n + \cdots, \quad (2)$$

$$(2) \times (-x) : -xf(x) = -F_0x - F_1x^2 - \cdots - F_{n-1}x^n - \cdots,$$

$$(2) \times (-x^2) : -x^2f(x) = -F_0x^2 - \cdots - F_{n-2}x^n - \cdots,$$

三式相加, 得

$$(1 - x - x^2)f(x) = F_0 + (F_1 - F_0)x + \sum_{n=2}(F_n - F_{n-1} - F_{n-2})x^n = 1.$$

即

$$f(x)=\frac{1}{1-x-x^2}. \tag{3}$$

令 $1-x-x^2=(1-w_1x)(1-w_2x)$,

容易算出

$$w_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad w_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \tag{4}$$

于是

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{1}{(1-w_1x)(1-w_2x)}=\frac{A_1}{1-w_1x}+\frac{A_2}{1-w_2x}\\ &=A_1\sum_{n=0}^{\infty}(w_1x)^n+A_2\sum_{n=0}^{\infty}(w_2x)^n\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}(A_1w_1^n+A_2w_2^n)x^n, \end{aligned} \tag{5}$$

其中

$$A_1=\lim_{x\to\frac{1}{w_1}}f(x)(1-w_1x)=\lim_{x\to\frac{1}{w_1}}\frac{1}{1-w_2x}=\frac{w_1}{w_1-w_2},$$

同样

$$A_2=\frac{w_2}{w_1-w_2}.$$

(5) 式可写为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{w_1-w_2}(w_1^{n+1}-w_2^{n+1})x^n, \tag{6}$$

与 (2) 式比较系数, 便得

$$F_n=\frac{1}{w_1-w_2}(w_1^{n+1}-w_2^{n+1}), \tag{7}$$

即为 (1) 式.

这个等式告诉我们, 虽然所有的 F_n 都是正整数, 可是它们可以用一些无理数表示出来. 由于 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<1$, 因此, 当 n 是奇数时, 则 F_n 等于 $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$ 的整数部分, 当 n 是偶数时, 则 F_n 等于 $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$ 的整数部分加 1.

读者可参阅《从杨辉三角谈起》(青年数学小丛书, 中国青年出版社).

作为练习, 请读者求出下面两个数贯的解析表达式:

1) 数贯 $F_n^{(t)}$, 由递归公式

$$F_0^{(t)}=1, F_1^{(t)}=t, F_n^{(t)}=t(F_{n-1}^{(t)}+F_{n-2}^{(t)})(n\geqslant 2)$$

给出. 当 $t=1$ 时, 就是 F_n.

2) 数贯 c_n, 由递归公式

$$c_0=c_1=c_2=1, c_{n+1}=c_{n-1}+c_{n-2}(n\geqslant 2)$$

给出.

它们将分别在第二章和第三章中用到.

黄金分割法

分数法虽好, 但预先需要知道做多少次试验, 这是很难的, 因为预先给定精密度 (误差范围)ε 是不容易的. 一般说来, 函数的变化不是均匀的, 越靠近极大值, 变化越平坦, 一旦试验结果不能分辨优劣时, 试验就只好停止. 所以, 我们希望能有一个预先不限定试验次数的好方法.

现在我们来看看, 当 n 趋向于无穷时, $\dfrac{F_n}{F_{n+1}}$ 的极限如何.

因为 $\left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right|<1$, 易见

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

我们记 $w=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

进一步考虑差

$$\begin{aligned}\frac{F_n}{F_{n+1}}-w&=\frac{F_n-F_{n+1}w}{F_{n+1}}\\&=\frac{1}{\sqrt{5}F_{n+1}}\left\{-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+3}\right\}\\&=\frac{1}{F_{n+1}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}=\frac{(-1)^n}{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}F_{n+1}}.\end{aligned}$$

$$= \frac{-(-1)^{n-1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} F_n} \cdot \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{F_{n+1}}{F_n}}$$

$$= \frac{w - \frac{F_{n-1}}{F_n}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \frac{F_{n+1}}{F_n}},$$

$$\therefore \quad \left| \left(\frac{F_n}{F_{n+1}} - w\right) \Big/ \left(w - \frac{F_{n-1}}{F_n}\right) \right| = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \frac{F_{n+1}}{F_n}} < 1.$$

因此

$$\left| \frac{F_n}{F_{n+1}} - w \right| < \left| w - \frac{F_{n-1}}{F_n} \right|.$$

而由

$$\frac{F_n}{F_{n+1}} - w = \frac{(-1)^n}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} F_{n+1}},$$

易见：当 n 为偶数时，$\frac{F_n}{F_{n+1}} > w$，当 n 为奇数时，$\frac{F_n}{F_{n+1}} < w$. 于是

$$\frac{F_2}{F_3} > \frac{F_4}{F_5} > \frac{F_6}{F_7} > \cdots > w,$$
$$\frac{F_1}{F_2} < \frac{F_3}{F_4} < \frac{F_5}{F_6} < \cdots < w.$$

这说明 $\frac{F_n}{F_{n+1}}$，当 n 趋于无穷时，在 w 的一左一右摆动，而且一个比一个更接近 w.

用黄金分割法如下：

$1-w=w^2$　　w

0　　$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$　　$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　1

即在 w 处做第一个试验，然后再在对称点 $1-w$ 处做第二个试验. 因为

$$1 - w = w^2,$$

比较在 w 和 $1-w$ 处试验的结果，不管丢掉 $(0, 1, -w)$ 或 $(w, 1)$，余下区间的长度为原来的长度的 w 倍，且其中已包有一个试验点，其位置与原来两点之一 $(1-w$或$w)$

在 (0,1) 中的位置的比例是一样的. 原来是 $0<1-w<w<1$, 丢掉右边一段 $(w,1)$ 后的情形, 余下的是

$$0<1-w=w^2<w,$$

这不正是 (0,1) 缩小 w 倍的情形吗? 同样, 丢掉左边一段 $(0,1-w)$ 后的情形, 余下的是

$$1-w<w=(1-w)+w(1-w)<1$$

这正是 $0<1-w<1$ 缩小 w 倍的情形. 继续做下去, 依然一样, 做了 n 次试验后所留下的区间的长度是原来区间长度的 w^{n-1} 倍.

这种分割的方法在平面几何上叫做黄金分割, 因而这个 "优选法" 也就称为黄金分割法.

来回调试法

优选法的源流出于来回调试法, 这是我们经常用的方法, 函数仍假定是单峰的.

先取一点 x_1 做试验得 $y_1=f(x_1)$, 再取一点 x_2 做试验得 $y_2=f(x_2)$, 假定 $x_2>x_1$. 如果 $y_2>y_1$, 则最大值肯定不在区间 (a,x_1) 内, 因此只需考虑在 (x_1,b) 内求最大值的问题. 再在 (x_1,b) 内取一点 x_3, 做试验得 $y_3=f(x_3)$, 如果 $x_3>x_2$ 而 $y_3<y_2$, 则丢掉 (x_3,b), 再在 (x_1,x_3) 中取一点 $x_4,\cdots$, 不断做下去, 就这样通过来回调试, 范围越缩越小, 总可以找到 $f(x)$ 的最大值 (图 1).

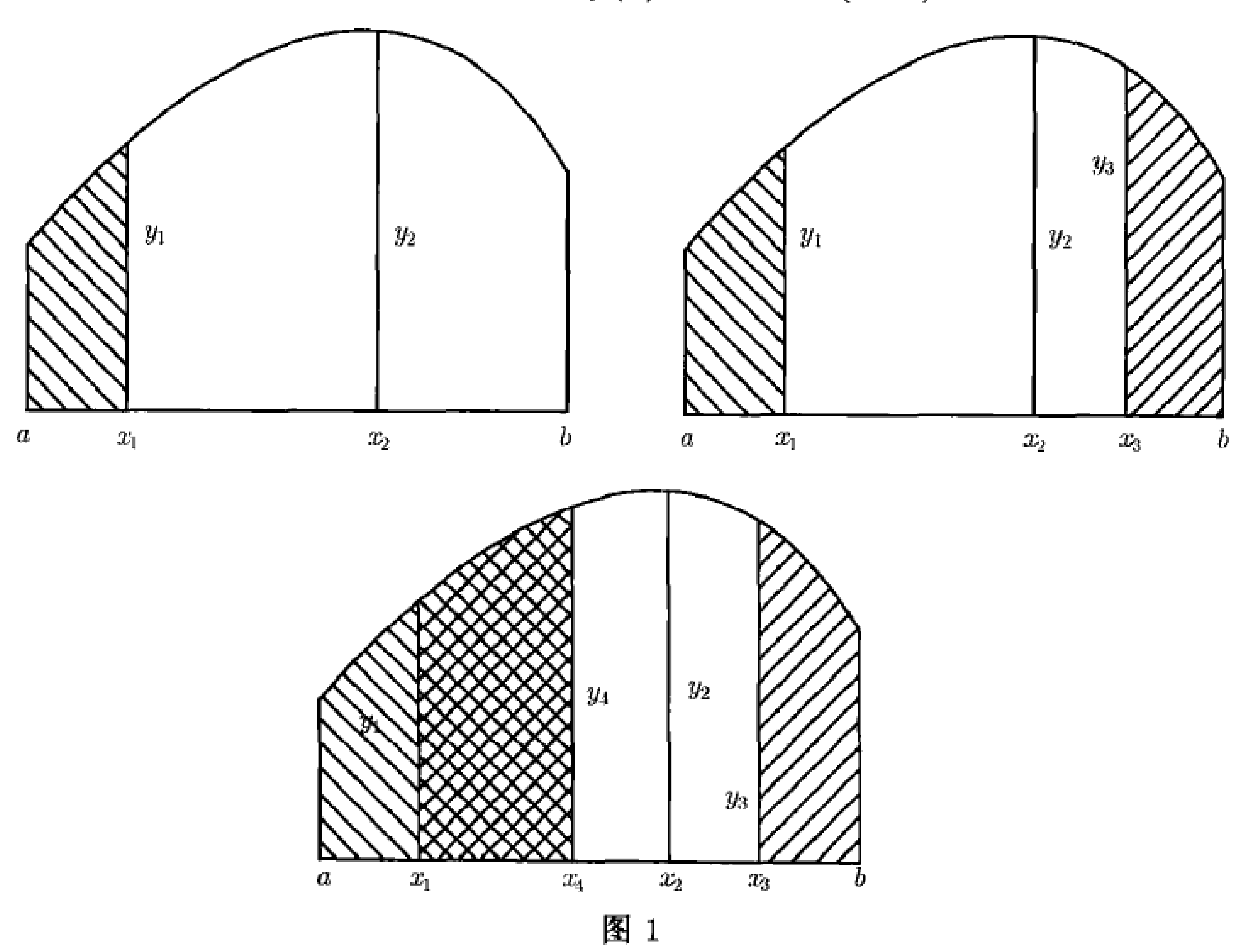


图 1

这方法取点是相当任意的, 只要取在上次剩下的范围内就行了, 我们的根本问题是: 怎样取 $x_1, x_2, \cdots$, 可以最快地接近客观上存在的最高点? 也就是怎样的安排试验点的方法是最好的?

何谓 "最好" 的来回调试法? 先看一例, 有一方法, 第一试验点在 2/10, 第二试验点在 1/10, 对峰值在 $(0, 1/10)$ 中的单峰函数, 再次试验便去掉了区间长度的 4/5(图 2), 但对于峰值在 $(2/10, 1)$ 的函数, 只能去掉 1/10, 这就吃亏了. 由于我们试验的目标函数是事先全然不知道的, 因此我们说的 "最好", 就不能对个别的单峰函数来说, 而应对全体这类函数而言.

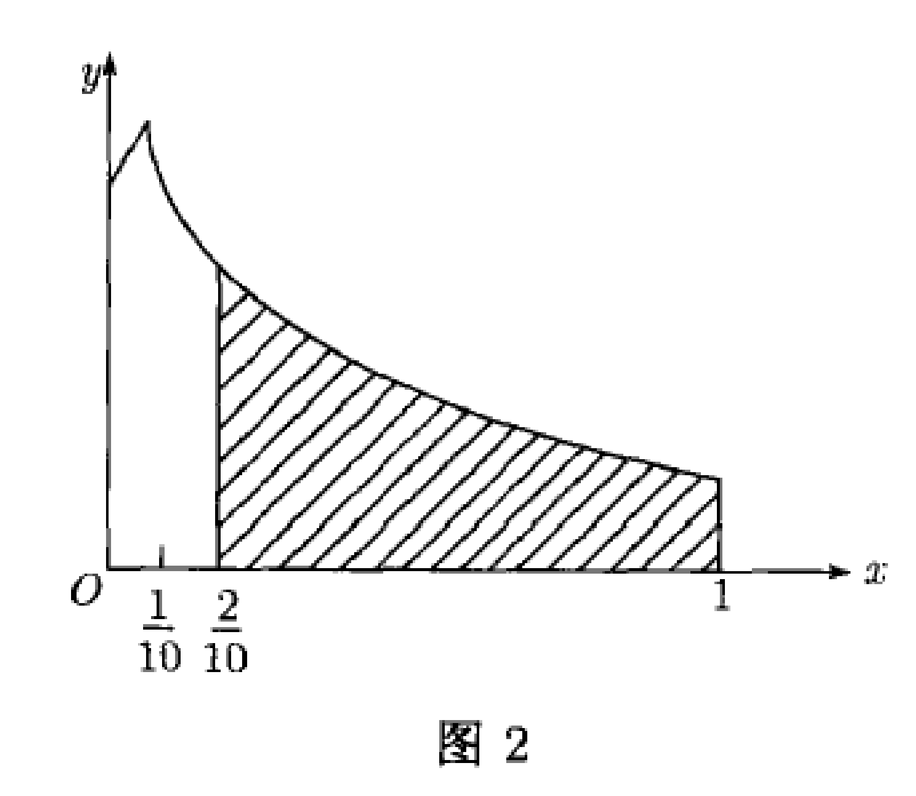


图 2

这里不引入更多的数学定义, 只是根据上面所说的事实, 在评判一个来回调试法的效率时, 作如下的约定:

如图 3 在 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ 做了两个试验以后进行比较时, 总是遇到坏 (吃亏) 的情况, 即只能去掉 (a, x_1) 和 (x_2, b) 中较短的那一段.

a x_1 x_2 b

图 3

这样做了 n 次之后, 余下一个包含有最好点的区间, 其长度称为 (该方法)n 次试验的 Δ- 精密度.

对黄金分割法, 假定原区间长度为 1, 则做 n 次试验后余下区间长度为 w^{n-1}, 于是

$$\Delta_n = w^{n-1}.$$

因此, 若预先给定精密度 ε, 这时所要做的试验次数 n 应适合

$$w^{n-1} < \varepsilon,$$

即

$$n > 4.8 \log \frac{1}{\varepsilon} + 1.$$

也就是说 n 的数量级是 $\log \frac{1}{\varepsilon}$.

在所有的来回调试法中, 以黄金分割法为 "最好". 我们有

基本定理 任何一个来回调试法, 如果不是黄金分割法, 总可以找到正整数 N, 当试验次数 n 大于 N 之后, 其精度 Δ_n 总不如黄金分割法做同样次数 n 的精度 ln, 即

$$\Delta_n > \ln = w^{n-1} \quad (n > N).$$

黄金分割法的最优性

在这一节里, 我们将证明上节的基本定理.

先建立一个不等式.

对于任意一个来回调试法, 假定第一点和第二点分别在 x_1 和 x_2 处做, 不妨假定区间就是 $(0,1)$, 且 $x_1 < x_2$, 显然 $\Delta_1 = 1$(图 4).

图 4

当 $x_1 + x_2 \geqslant 1$ 时, $\Delta_2 \geqslant x_2$, 不论第三点如何取, 总有

$$\Delta_3 \geqslant x_1,$$

故得不等式

$$\Delta_2 \leqslant \Delta_1 \leqslant \Delta_2 + \Delta_3. \tag{1}$$

当 $x_1 + x_2 < 1$ 时, $\Delta_2 \geqslant 1 - x_1$, 不论第三点如何取, 总有 $\Delta_3 \geqslant 1 - x_2$, 故

$$\Delta_2 + \Delta_3 \geqslant (1 - x_1) + (1 - x_2) = 2 - (x_1 + x_2) > 1 = \Delta_1.$$

于是, 不论第一、二、三点如何取, (1) 式恒成立.

一般地, 我们有下面的不等式,

$$\Delta_{K+1} \leqslant \Delta_K \leqslant \Delta_{K+1} + \Delta_{K+2} \quad (K = 1, 2, \cdots). \tag{2}$$

由 (2), 用归纳法容易证明

$$\Delta_K \leqslant F_n \Delta_{n+K} + F_{n-1} \Delta_{n+K+1} \quad (K, n = 1, 2, \cdots). \tag{3}$$

这里 $F_0 = F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geqslant 2)$.

记黄金分割法第 K 次试验后余下区间长度为 l_K, 已知

$$l_K = w^{K-1}, \quad w = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \tag{4}$$

对于 l_K, 恒有等式

$$l_K = l_{K+1} + l_{K+2} \quad (K = 1, 2, \cdots), \tag{5}$$

$$l_K = F_n l_{n+K} + F_{n-1} l_{n+K+1} \quad (n, K = 1, 2, \cdots). \tag{6}$$

下面, 用反证法来证明基本定理.

若定理不成立, 则对于给定的来回调试法, 必有一无穷数贯 $n_1 < n_2 < \cdots < n_s < \cdots$, 使得

$$\Delta_{n_s} \leqslant l_{n_s} \quad (s = 1, 2, \cdots). \tag{7}$$

对任意的 K, 必有 n_i, 使 $K < n_i < n_{i+1} < \cdots$. 不妨就当作 $n_0 = K < n_1 < n_2 < \cdots$.

由不等式 (3), 得

$$\begin{aligned}
\Delta_K = \Delta_{n_0} &\leqslant F_{n_1-n_0}\Delta_{n_1} + F_{n_1-n_0-1}\Delta_{n_1+1} \\
&\leqslant F_{n_1-n_0}\Delta_{n_1} + F_{n_1-n_0-1}(F_{n_2-n_1-1}\Delta_{n_2} + F_{n_2-n_1-2}\Delta_{n_2+1}) \\
&\leqslant \cdots \\
&\leqslant F_{n_1-n_0}\Delta_{n_1} + F_{n_1-n_0-1}F_{n_2-n_1-1}\Delta_{n_2} + \cdots \\
&\quad + \left(\prod_{i=0}^{s-1} F_{n_{i+1}-n_i-1}\right)\Delta_{n_s} \\
&\quad + \left(\prod_{i=0}^{s-2} F_{n_{i+1}-n_i-1}\right)F_{n_s-n_{s-1}-2}\Delta_{n_s+1}.
\end{aligned} \tag{8}$$

而由 (6), 有

$$\begin{aligned}
l_K = l_{n_0} &= F_{n_1-n_0}l_{n_1} + F_{n_1-n_0-1}F_{n_2-n_1-1}l_{n-2} + \cdots \\
&\quad + \left(\prod_{i=0}^{s-1} F_{n_{i+1}-n_i-1}\right)l_{n_s} \\
&\quad + \left(\prod_{i=0}^{s-2} F_{n_{i+1}-n_i-1}\right)F_{n_s-n_{s-1}-2}l_{n_s+1}.
\end{aligned} \tag{9}$$

由于 $\Delta_{n_i} \leqslant l_{n_i}, \quad \Delta_{n_s+1} \leqslant \Delta_{n_s} \leqslant l_{n_s},$

从 (8) 式减去 (9) 式, 得

$$\begin{aligned}
\Delta_K - l_K &\leqslant \left(\prod_{i=0}^{s-2} F_{n_{i+1}-n_i-1}\right)F_{n_s-n_{s-1}-2}(l_{n_s} - l_{n_s+1}) \\
&= \left(\prod_{i=0}^{s-2} F_{n_{i+1}-n_i-1}\right)F_{n_s-n_{s-1}-2}l_{n_s+2}.
\end{aligned} \tag{10}$$

因为

$$\begin{aligned}
F_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}(w^{-(n+1)} - (-w)^{n+1}) \\
&\leqslant \frac{w^{-n}}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{w} + w\right) = w^{-n},
\end{aligned}$$

由 (10) 即得

$$\Delta_K - l_K \leqslant w^{s-1-n_{s-1}+n_0} \cdot w^{-n_s+n_{s-1}+2} \cdot w^{n_s+1} = w^{s+n_0+2} = w^{s+K+2} \quad (s=1,2,\cdots).$$

令 $s \to \infty$, 即得

$$\Delta_K \leqslant l_K \quad (K=1,2,\cdots). \tag{11}$$

由定理假定, 给定的来回调试法不是黄金分割法, 因而必有某一个 s, 使

$$\Delta_s < l_s.$$

由 (3) 和 (6),

$$1 = \Delta_1 \leqslant F_{s-1}\Delta_s + F_{s-2}\Delta_{s+1} < F_{s-1}l_s + F_{s-2}l_{s+1} = l_1 = 1,$$

得出矛盾.

证毕.

连分数的知识

现在, 我们换一个方法研究来回调试法, 给出黄金分割法最优性的一个直接证明, 并说明一些更深刻的内容.

为此, 需要用到连分数这一工具. 如果我们约定只考虑对称取点的来回调试法, 那末就与辗转相除法、连分数关系十分密切, 抽象地说, 他们实际上是一回事. 所以, 我们先介绍连分数的知识.

1) 先从两个正整数 a, b 谈起. 假定 $b < a$, 用 b 除 a 得商 a_0, 余 r,

$$a = a_0 b + r, \quad 0 \leqslant r \leqslant b.$$

若 $r \neq 0$, 再用 r 除 b 得商 a_1, 余 r_1, 即

$$b = a_1 r + r_1, \quad 0 \leqslant r_1 < r;$$

若 $r_1 \neq 0$, 再用 r_1 除 r, 得

$$r = a_2 r_1 + r_2, \quad 0 \leqslant r_2 < r;$$

若 $r_2 \neq 0$, 则继续做下去, 由此得

$$b > r > r_1 > r_2 > \cdots \geqslant 0$$

经有限步后, 余数必为 0, 例如 $r_n = 0$, 这个方法叫做辗转相除法. 上面的过程可以写为:

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{r}{b} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{r_1}{r}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{r_2}{r_1}}}$$

$$= \cdots = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}},$$

这一繁分数称为连分数. 为了节省篇幅, 把它写为

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}.$$

例 1

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1}, \quad \frac{2}{3} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1},$$
$$\frac{3}{5} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1},$$

一般地有

$$\frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{1}{1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}} = \underbrace{\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{1}}_{n+1\text{个}}$$

2) 辗转相除不一定限于有理数 $\frac{a}{b}$, 对任一无理数 α, 也可以写为

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}, \quad a_0 = [\alpha], \quad \alpha_1 > 1,$$

方括弧代表 α 的整数部分. 再令

$$\alpha_1 = a_1 + \frac{1}{\alpha_2}, \quad a_1 = [\alpha_1], \quad \alpha_2 > 1.$$

一般地

$$\alpha_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{\alpha_n}, \quad a_{n-1} = [\alpha_{n-1}], \quad \alpha_n > 1.$$

因此, 得到 α 的连分数表达式为

$$a_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \cdots.$$

因为, 任意有限项的连分数都是有理数, 所以无理数的连分数必然是无穷的.

经计算得

$$a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1},$$

$$a_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{a_0 a_1 a_2 + a_2 + a_0}{a_2 a_1 + 1},$$

$$\cdots\cdots$$

令

$$a_0+\frac{1}{a_1+}\frac{1}{a_2+}\cdots+\frac{1}{a_n}=\frac{p_n}{q_n},$$

称为 α 的第 n 个渐近分数.

例 2　令 $w=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, 它适合于 $w^2+w-1=0$, 即

$$\begin{aligned}w&=\frac{1}{1+w}=\frac{1}{1+}\frac{1}{1+w}=\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+w}\\&=\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\cdots\end{aligned}$$

因此, $\dfrac{F_n}{F_{n+1}}$ 就是 w 的渐近分数, §3 中的结果说明

$$\frac{F_2}{F_3}>\frac{F_4}{F_5}>\frac{F_6}{F_7}>\cdots>w,\quad \frac{F_1}{F_2}<\frac{F_3}{F_4}<\frac{F_5}{F_6}<\cdots<w.$$

即得

$$\frac{F_{2i}}{F_{2i+1}}>w>\frac{F_{2i-1}}{F_{2i}}$$

的一个小于一个的区间套, 又由

$$\begin{aligned}\frac{F_{2i}}{F_{2i+1}}-\frac{F_{2i-1}}{F_{2i}}&=\frac{1}{5F_{2i}F_{2i+1}}\{[w^{-(2i+1)}-(-w)^{2i+1}]^2\\&\quad-[w^{-2i}-(-w)^{2i}][w^{-2i-2}-(-w)^{2i+2}]\}\\&=\frac{1}{5F_{2i}\cdot F_{2i+1}}(w^2+w^{-2}+2)\\&=\frac{1}{5F_{2i}\cdot F_{2i+1}}[w^{-1}-(-w)]^2=\frac{1}{F_{2i+1}F_{2i}},\end{aligned}$$

可知区间套一个套着一个.

连分数与来回调试法 (一)

考虑对称取点的来回调试法.

在区间 $(0,1)$ 中已做了试验的点为 α.

(i) 若 $\alpha=\dfrac{1}{1+\theta_1}$, $0<\theta_1<1$.

图 5

则 $\alpha>\dfrac{1}{2}$, 对称取点, 第二个试验点在 $1-\alpha$ 处, 不论去掉那一段, 余下区间的长度总是 α, 即

$$\Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = \alpha = \frac{1}{1+\theta_1}.$$

不失一般性, 不妨假定总是靠近左边的点好, 也就是说, 总是去掉右边一小段.

因为 $\alpha + \theta_1\alpha = 1$, 即 $1 - \alpha = \theta_1\alpha = \theta_1\Delta_2$, 因而, 从 α 开始做二次试验后, 余下区间中的已试验点, 即 $(1-\alpha)$ 的位置恰好在区间长度的 θ_1 倍处, 同样, 若

$$\theta_1 = \frac{1}{1+\theta_2}, \quad 0 < \theta_2 < 1.$$

则用对称法取第三点, 余下的区间长度为

$$\Delta_3 = \theta_1\Delta_2 = \theta_1\alpha.$$

余下区间中的已试验点的位置在区间长度的 θ_2 倍处.

(ii) 若 $\alpha = \dfrac{1}{p+\theta}$, p 为 $\geqslant 2$ 的整数, $0 < \theta < 1$,

图 6

则 $\alpha < \dfrac{1}{2}$, 从 α 开始, 对称取点做二次试验后, 余下区间的长度为

$$\begin{aligned}\Delta_2 = 1 - \alpha = 1 - \frac{1}{p+\theta} &= \frac{p-1+\theta}{p+\theta} \\ &= \frac{1}{1+\dfrac{1}{p-1+\theta}},\end{aligned} \tag{1}$$

其中已试验点 (即 α) 的位置在区间长度的

$$\alpha : (1-\alpha) = \frac{1}{p-1+\theta}$$

倍处, 再做下去相当于在区间中从 $\alpha_1 = \dfrac{1}{p-1+\theta}$ 出发来回调试, 再做了 $p-2$ 次后, 余下区间 $(0, 1-(p-1)\alpha)$, 即由一段长为 $\theta\alpha$, 另一段为 α 的二段所组成, 所以再做一次, 取点应在 $\theta\alpha$ 处了, 余下区间的长度为 α, 其中已试验点的位置恰好在区间长度的 θ 倍处.

图 7

这样不断做下去, 如

$$\alpha=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n+\theta_n},\quad 0<\theta_n<1.$$

则经 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 次对称取点调试点 (不算 α 本身一次), 余下区间中的已试验点的位置恰好在长度的 θ_n 倍处.

再证明几个引理.

引理 1 若

$$\alpha=\underbrace{\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{1+\theta}}_{m\text{个}},\quad 0<\theta<1.$$

则

$$\alpha=\frac{F_{m-1}+\theta F_{m-2}}{F_m+\theta F_{m-1}},\tag{2}$$

这里 $F_{-1}=0,F_0=1,F_n=F_{n-1}+F_{n-2}(n\geqslant 1)$.

证 用数学归纳法.

当 $m=1$ 时, $\alpha=\dfrac{1}{1+\theta}$, (2) 显然成立.

当 $m=2$ 时,

$$\alpha=\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\theta}}=\frac{1+\theta}{2+\theta},$$

(2) 也成立.

当 $m=n$ 时, 令 $\theta_{n-1}=\dfrac{1}{1+\theta}$,

则由归纳法假定, 即得

$$\alpha=\frac{F_{n-2}+\theta_{n-1}F_{n-3}}{F_{n-1}+\theta_{n-1}F_{n-2}}=\frac{F_{n-2}+\dfrac{1}{1+\theta}F_{n-3}}{F_{n-1}+\dfrac{1}{1+\theta}F_{n-2}}=\frac{F_{n-1}+\theta F_{n-2}}{F_n+\theta F_{n-1}}.$$

故 (2) 式成立.

引理 2 不等式

$$\frac{1}{F_{m+2}}\geqslant\frac{1}{5w^2}\cdot w^m\quad(m\geqslant 1)$$

成立, 当且仅当 $m=2$ 等号成立, 而

$$\frac{1}{5w^2}=\frac{3+\sqrt{5}}{10}=0.523\cdots.$$

证 仍用归纳法.

$$\text{当}m=1\text{时},\ \frac{1}{F_3}=\frac{1}{3}=\frac{1}{3w}w>\frac{1}{5w^2}\cdot w.$$

$$\text{当}m=2\text{时}, \frac{1}{F_4}=\frac{1}{5}=\frac{1}{5w^2}\cdot w^2.$$

故当 $m=1,2$ 时, 引理 2 成立.

对一般的 m, 若 $\frac{F_{m+1}}{F_{m+2}}>w$, 则由归纳法假设,

$$\frac{1}{F_{m+2}}=\frac{F_{m+1}}{F_{m+2}}\cdot\frac{1}{F_{m+1}}>w\left(\frac{1}{5w^2}\right)w^{m-1}=\frac{1}{5w^2}\cdot w^m.$$

$$\text{若}\frac{F_{m+1}}{F_{m+2}}<w, \text{则由§3}, \frac{F_m}{F_{m+1}}>w,$$

即 $\frac{F_{m+1}}{F_m}<\frac{1}{w}$, 所以由归纳法假设,

$$\begin{aligned}\frac{1}{F_{m+2}}&=\frac{1}{F_m+F_{m+1}}=\frac{1}{F_m}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{F_{m+1}}{F_m}}\\&>\left(\frac{1}{5w^2}\right)w^{m-2}\frac{1}{1+\dfrac{1}{w}}\\&=\left(\frac{1}{5w^2}\right)w^{m-2}\cdot\frac{w}{1+w}=\frac{1}{5w^2}\cdot w^m.\end{aligned}$$

故对一般 m 引理 2 也成立.

同样可证

引理 3 不等式

$$\frac{1}{F_{m+1}}\geqslant\frac{1}{2w}w^m\quad(m\geqslant1)$$

成立, 当且仅当 $m=1$ 时等号成立, 而

$$\frac{1}{2w}=\frac{1}{\sqrt{5}-1}=0.745\cdots.$$

现在来证 §4 的基本定理.

设区间 $(0,1)$ 中已有试验点 α.

Ⅰ. 若

$$\alpha=\underbrace{\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{1+\theta_m}}_{m\text{个}},\quad 0<\theta_m<1,$$

记

$$\alpha=\frac{1}{1+\theta_1}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\theta_2}}=\cdots=\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{1+\theta_m},$$

则再做 m 次 (共 $m+1$ 次) 试验后, 由引理 1 可知, 余下区间长度为

$$\Delta_{m+1}=\alpha\theta_1\theta_2\cdots\theta_{m-1}=\frac{F_{m-1}+\theta_mF_{m-2}}{F_m+\theta_mF_{m-1}}\cdot\frac{F_{m-2}+\theta_mF_{m-3}}{F_{m-1}+\theta_mF_{m-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{1+\theta_m}=\frac{1}{F_m+\theta_mF_{m-1}}.$$

因为 $0<\theta_m<1$, 故由引理 3, 可得

$$\Delta_{m+1}>\frac{1}{F_m+F_{m-1}}=\frac{1}{F_{m+1}}\geqslant\frac{1}{2w}w^m\quad(m\geqslant 1).$$

II. 若

$$\alpha=\underbrace{\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{1+\theta_m}}_{m个},$$

其中 $\theta_m=\dfrac{1}{p+\theta_{m+1}}$, $m\geqslant 1$, $p\geqslant 2$, $0<\theta_{m+1}<1$.

由于 $\theta_m<\dfrac{1}{2}$, 则由引理 2 可得

$$\Delta_{m+1}=\frac{1}{F_m+\theta_mF_{m-1}}>\frac{1}{F_m+\frac{1}{2}F_{m-1}}=\frac{2}{2F_m+F_{m-1}}=\frac{2}{F_{m+2}}\geqslant\frac{2}{5w^2}w^m\quad(m\geqslant 1).$$

III. 若

$$\alpha=\frac{1}{p+\theta},\quad p为\geqslant 2的整数,\quad 0<\theta<1,$$

分二种情形来讨论.

i) 若 $p\geqslant 3$, 则由 (1), 再做一次试验后,

$$\Delta_2=\frac{1}{1+\dfrac{1}{p-1+\theta}}>\frac{1}{1+\dfrac{1}{2}}=\frac{2}{3}=\frac{2}{3w}w.$$

ii) 若 $p=2$, (0,1) 中已试验点在 $\alpha=\dfrac{1}{2+\theta}$ 处, 第二个试验点应在 $1-\alpha$ 处, 此时, $\alpha<\dfrac{1}{2}<1-\alpha$, 这与 (0,1) 中已试验点在 $1-\alpha$, 再做第二个试验点在 α 的情形是一样的. 而

$$1-\alpha=1-\frac{1}{2+\theta}=\frac{1+\theta}{2+\theta}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\theta}},$$

归结为 I 的情形.



图 8

因之, 若

$$\alpha=\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{1}+\frac{1}{p+\theta_m},\quad p\geqslant 2,\quad 0<\theta_m<1.$$

在 (0,1) 中依 α 进行对称来回调试, 由 II, 做 $m+1$ 次试验后, 余下区间中已试验点的位置在 $\frac{\Delta_{m+1}}{p+\theta_m}, p\geqslant 2$. 再由III i), 再做 $p-2$ 次试验后, 即共做 $m+1+p-2=m+p-1$ 次后, 余下的区间长度为

$$\Delta_{m+p-1}\geqslant\left(\frac{2}{5w^2}\right)w^m\left(\frac{2}{3w}\right)^{p-2}w^{p-2}>\left(\frac{2}{5w^2}\right)^{p-1}w^{m+p-2}.$$

再往下做就是III ii) 的情形了.

现在我们回到基本定理的证明.

若 α 是有理数, 可由 §8 的论证中顺便推得基本定理成立.

若 α 不是有理数, 即 α 可以写成无穷连分数, 此时, 对称取点来回调试法可以一直做下去.

如 $\alpha\neq w$, 那末 α 的展开式中一定不全是 1, 记这些不为 1 的数依次为 $p_1,p_2,p_3,\cdots$.

1. 若这样的 p_i 多于 c 个 (c 在下面定出), 则当 n 充分大之后, 综合 I, II, III, 恒有

$$\Delta_n\geqslant\left(\frac{2}{5w^2}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{c}(p_i-1)}\frac{1}{2w}w^{n-1}.$$

因子 $\frac{1}{2w}=0.745\cdots<1$, 至多是在最后一个试验点是属于 I 若III (ii) 的情形时才出现.

如果 $\left(\frac{2}{5w^2}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{c}(p_i-1)}>2w$, 即

$$\sum_{i-1}^{c}(p_i-1)>\frac{\log 2w}{\log 2/5w^2}=4,6\cdots.$$

时, 则 $\Delta_n>\ln$, 只要取 $c=5$ 就可以达到目的, 即 p_i 多于 5 个时, 当 n 充分大时,

$$\Delta_n>w^{n-1}=\ln.$$

2. 若这样的 p_i 不超过 $c-1$ 个, 则

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{1}+\cdots\frac{1}{p_1}+\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{p_{c-1}}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\cdots\\ &= \frac{1}{1}+\cdots\frac{1}{p_1}+\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{p_{c-1}+w}.\end{aligned}$$

故做充分大 n 次试验以后, 又变为黄金分割法了, 此时

$$\Delta_n \geqslant \left(\frac{2}{5w^2}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{c-1}(p_i-1)} w^{n-1} > w^{n-1} = \ln.$$

这就证明了基本定理.

附记 衡量一个方法好坏时, 还可以用另一种精度, 即以 n 次试验后余下区间中已试验点与较远的那个端点的距离 δ_n 作为 n 次试验的精密度. 如 n 次试验后余下的区间为 (a,b), 其中已试验点为 x, 真正的最好点为 x_0, 于是

$$|x_0-x_n| \leqslant \delta_n = \max(x-a, b-x).$$

图 9

为了与前面所说的 Δ- 精密度区别, 称这种精密度为 δ- 精密度.

分数法 F_n/F_{n+1} 的 δ- 精密度为 $\delta_n = \dfrac{1}{F_{n+1}}$, 黄金分割法的 δ- 精密度为 $\delta_n = w^n$. 由于对称取点, 总有 $\delta_n = \Delta_{n+1}$. 从上面证明即得: 在 δ- 精密度下, 基本定理依然成立.

连分数与来回调试法 (二)

上面证明了在不限定试验次数的情形下黄金分割法的最优性. 现在再来看看用来回调试法限定做 N 次试验的情形.

设

$$\alpha = \underbrace{\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{1+\theta_m}}_{m\text{个}}$$

其中 $m+p+1<N$, $\theta_m = \dfrac{1}{p+\theta_{m+1}}$, 整数 $p \geqslant 2$, $0<\theta_{m+1}<1$. 作

$$\alpha' = \underbrace{\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{1}}_{m+1\text{个}}+\frac{1}{(p-1)+\theta_{m+1}}.$$

从 α 出发, 用来回调试法, 做 $m+1$ 次试验后, 余下区间的长度为

$$\Delta_{m+1}=\frac{1}{F_m+\theta_m F_{m-1}},$$

其中已试验点的位置在 $\theta_m\Delta_{m+1}$ 处, 再做一次, 因为 $0<\theta_m<\frac{1}{2}$, 故有

$$\begin{aligned}\Delta_{m+2}&=(1-\theta_m)\Delta_{m+1}=\frac{1-\theta_m}{F_m+\theta_m F_{m-1}}\\&=\frac{p-1+\theta_{m+1}}{(p-1+\theta_{m+1})F_m+F_{m+1}},\end{aligned}$$

其中已试验点的位置在

$$\frac{1}{p-1+\theta_{m+1}}\Delta_{m+2}$$

处.

从 α' 出发, 用来回调试法, 做 $m+2$ 次试验后, 余下区间的长度为

$$\begin{aligned}\Delta'_{m+2}&=\frac{1}{F_{m+1}+\dfrac{1}{p-1+\theta_{m+1}}F_m}\\&=\frac{p-1+\theta_{m+1}}{F_m+(p-1+\theta_{m+1})F_{m+1}},\end{aligned}$$

其中已试点的位置在

$$\frac{1}{p-1+\theta_{m+1}}\Delta'_{m+2}$$

处, 由于

$$F_m+(p-1+\theta_{m+1})F_{m+1}-[(p-1+\theta_{m+1})F_m+F_{m+1}]=(p-2+\theta_{m+1})F_{m-1}>0,$$

故

$$\Delta_{m+2}>\Delta'_{m+2}$$

且它们中间已试验点的位置是一样的, 故当 $N\geqslant n\geqslant m+2$ 时, 却有

$$\Delta_n>\Delta'_n,$$

或一样有

$$\delta_n>\delta'_n.$$

也就是说, 对于所有形式的 α:

$$\alpha=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_l+\theta},$$

其中 $a_1,\cdots,a_l$ 为正整数, $a_1+a_2+\cdots+a_l+1=N$,

$$1\leqslant l\leqslant N-1,\quad 0<\theta<1.$$

从 $\bar{\alpha}=\underbrace{\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{1+\theta}}_{N-1\text{个}}$, $0<\theta<1$ 出发, 用来回调试法做 N 次试验所得的精度为最好.

由此可知, 只做 N 次试验的最好方法只要从 $\bar{\alpha}$ 中去找就可以了. 而从 $\bar{\alpha}$ 出发, 用来回调试法做 N 次试验后余下的区间长度为

$$\Delta_N=\frac{1}{F_{N-1}+\theta F_{N-2}},$$

$\theta\Delta_N$

Δ_N

图 10

其中已试点的位置在 $\theta\Delta_N$ 处.

因而

$$\delta_N=\max(1-\theta,\theta)\Delta_N=\frac{\max(1-\theta,\theta)}{F_{N-1}+\theta F_{N-2}}$$
$$=\begin{cases}\dfrac{1-\theta}{F_{N-1}+\theta F_{N-2}}, \text{若} 0<\theta\leqslant\dfrac{1}{2}.\\[2ex] \dfrac{\theta}{F_{N-1}+\theta F_{N-2}}, \text{若}\dfrac{1}{2}\leqslant\theta<1.\end{cases}$$

显然, 当 $\theta=\frac{1}{2}$ 时, δ_N 取最小值

$$\delta_N=\frac{\frac{1}{2}}{F_{N-1}+\frac{1}{2}F_{N-2}}=\frac{1}{F_{N+1}},$$

而此时,

$$\bar{\alpha}=\underbrace{\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\cdots+}_{N-1\text{个}}\frac{1}{1+\frac{1}{2}}$$
$$=\underbrace{\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{1}}_{N+1\text{个}}=\frac{F_N}{F_{N+1}}.$$

这就是分数法.

这样, 我们在 δ- 精度下, 证明了分数法 $\frac{F_N}{F_{N+1}}$ 是 N 次试验的最优来回调试法, 这与 §1 中的结论是一致的.

显然

$$\delta_N\left(\frac{F_N}{F_{N+1}}\right) < \delta_N(w),$$

即

$$\frac{1}{F_{N+1}} < w^N.$$

由引理 3, 可推出

$$\frac{1}{F_{N+1}} \geqslant \left(\frac{1}{2w}\right) w^N = \left(\frac{1}{2w^2}\right) w^{N+1} > w^{N+1} = \delta_{N+1}(w).$$

从而有

$$w^{N+1} < \frac{1}{F_{N+1}} < w^N.$$

即在 δ- 精度下, 分数法比黄金分割法好. 如用黄金分割法再多做一次试验就比分数法好了.

在 Δ- 精度下情况就不一样了. 由于 Δ_N 是 θ 在 (0,1) 中单调递减函数. 当 $\theta \to 1$ 时, Δ_N 单调递减于

$$\frac{1}{F_{N-1} + F_{N-2}} = \frac{1}{F_N}$$

因为只限于做 N 次试验, 故 θ 不能等于 1, 也就是没有一个方法能达到精度 $\frac{1}{F_N}$, 即不存在一个最好的方法.

分数法 $\frac{F_N}{F_{N+1}}$ 相当于 $\bar{\alpha}$ 中 $\theta = \frac{1}{2}$ 的情形, 而黄金分割法相当于 $\theta = w$ 的情形, 由于 $w > \frac{1}{2}$, 可知

$$\Delta_N(F_N/F_{N+1}) > \Delta_N(w),$$

即

$$\frac{2}{F_{N+1}} > w^{N-1}.$$

此式亦可从引理 3 直接推出, 这说明在 Δ- 精度下, 分数法又不如黄金分割法下.

到此, 分数法与黄金分割法的关系就比较清楚了, 并且解决了 α 是有理数的情形.

对 分 法

上面介绍的是: 求函数 $f(x)$ 最优值的一些方法和它们的理论根据. 在实践中也常遇到这样一类特殊的问题, 例如: 在保证质量的前提下, 如何降低某种原材料的消耗? 如何降低成本? 如何尽快地找到电路、通讯线路、下水道、输油管以及机

器、仪器的故障? 砂轮、转子的静平衡等. 这些问题的特殊性在于: 每次试验的结果只有二种性态, 因此可以化为另一类的数学模型.

对这类问题, 我们建议用以下的对分法, 而不用 0.618 法.

例如, 有一条 10 公里长的输电线路出了故障, 在线路一端 A 处有电, 在另一端 B 处没有电, 要迅速查出断头所在位置. 我们先在线路中间的 C 点检查, 如果有电, 说明断头不在 AC 而是在 CB 一段, 又在 CB 中点 D 检查, 如果无电, 说明断头在 CD 部分, 再在 CD 中间 E 处检查, 如此类推, 很快就能找出断头位置.

A C E D B
有电 有 无 无 无电

对分法最简单, 但在实践中应用非常普遍. 用对分法每做一次试验, 区间长度缩短一半. 若原区间长为 l, 做了 n 次试验后, 余下区间长度为

$$\frac{1}{2^n}l,$$

易见, 对分法所需试验次数的数量级也是

$$\log\frac{1}{\varepsilon},$$

其中 ε 是预先给定的精度.

对一些不易求解的方程或方程组, 用对分法能迅速求出近似解. 可参阅本书附录二.

抛物线法

述　要

不管是 0.618 法还是分数法, 都只是比较两个试验结果的好坏, 而不考虑已做试验结果的数值如何. 能不能利用已得的试验数据, 做到对技术精益求精呢? 例如在试得三个数据后, 我们可以过这三点作一抛物线, 以这抛物线的达到顶点处作下次试验的根据. 确切地说是这样: 在三个点 $x_1 < x_2 < x_3$, 分别试验得数据 y_1, y_2, y_3, 我们用插入公式

$$y = y_1\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2\frac{(x-x_3)(x-x_1)}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)} + y_3\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

得到一个二次函数, 它的图像就是一条抛物线. 这个函数在点

$$x_4 = \frac{1}{2}\frac{y_1(x_2^2-x_3^2)+y_2(x_3^2-x_1^2)+y_3(x_1^2-x_2^2)}{y_1(x_2-x_3)+y_2(x_3-x_1)+y_3(x_1-x_2)}$$

处取最大值, 因此, 我们下一次的选点取 $x = x_4$, 得试验数据 y_4, 然后利用 x_2, x_3, x_4 三点的数据 y_2, y_3, y_4 又可得出一条抛物线, 如此继续做下去.

当然, 为了更快接近最大值, 可在 y_1, y_2, y_3, y_4 中取最大的, 所对应的 x_i 作为新的 x_2, 并取其左边最近的 x_i 作为新的 x_1, 右边最近的 x_i 作为新的 x_3, 再同样做下去, 不断获得新的 y 值.

如果发生 $x_4 = x_2$ 的情况, 我们的方法还必须修改 (§1).

粗略地说, 穷举法作 n 次试验的同样效果, 黄金分割法只要数量级 $\log n$ 次就可以达到, 本章提出的抛物线法, 效果更好些, 只要数量级 $\log\log n$ 次, 原因就在于黄金分割法没有较多地利用函数的性质, 做了两次试验, 比一比大小, 就把它丢掉了. 抛物线法则对试验结果注意到数量方面的分析. 当然, 要保证抛物线法收敛速度, 对函数也作了一些适当的限制.

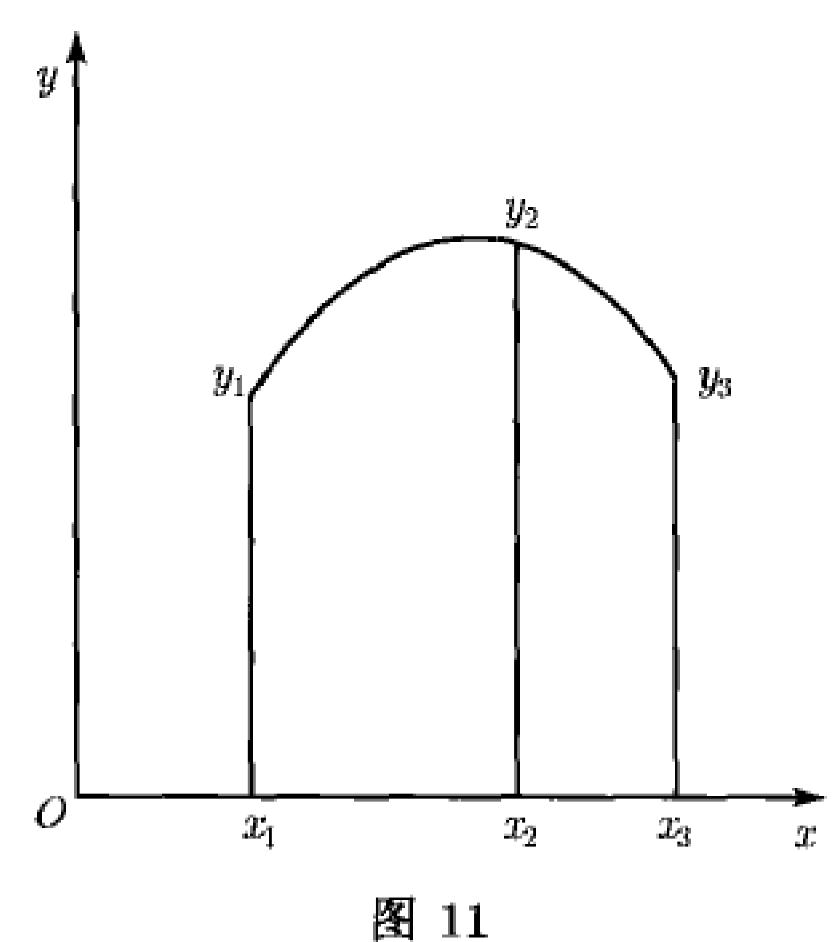


图 11

抛物线法常常用在 0.618 法或分数法取得一些数据的情况, 这时能收到更好的效果. 此外, 我们还建议大家做完了 0.618 法或分数法的试验后, 用最后三个数据按抛物线法求出 x_4, 并计算这个抛物线在点 $x = x_4$ 处的数值, 预先估计一下在点 x_4 处的试验结果, 然后将这个数值与已经试得的 (在 y_1, y_2, y_3 中) 最佳值作比较, 以此作为是否在点 x_4 处再作一试验的依据.

第一种方法

设在三点

$$x_1 < x_2 < x_3$$

处分别测得 $y = f(x)$ 的函数值

$$f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, f(x_3) = y_3,$$

用 Lagrange 插入法作抛物线

$$g(x) \equiv y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2 \frac{(x-x_3)(x-x_1)}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)} + y_3 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

这个函数的极值由

$$g'(x) \equiv \frac{2x-x_2-x_3}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2 \frac{2x-x_3-x_1}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)} + y_3 \frac{2x-x_1-x_2}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = 0$$

给出, 也就是

$$\begin{aligned} x = x_4 &= \frac{1}{2} \frac{y_1(x_2^2-x_3^2) + y_2(x_3^2-x_1^2) + y_3(x_1^2-x_2^2)}{y_1(x_2-x_3) + y_2(x_3-x_1) + y_3(x_1-x_2)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(x_3^2-x_2^2)(y_2-y_1) + (x_1^2+x_2^2)(y_3-y_2)}{(x_3-x_2)(y_2-y_1) + (x_1-x_2)(y_3-y_2)} \\ &= x_2 + \frac{1}{2} \frac{(x_3-x_2)^2(y_2-y_1) + (x_1-x_2)^2(y_3-y_2)}{(x_3-x_2)(y_2-y_1) + (x_1-x_2)(y_3-y_2)}. \end{aligned} \tag{1}$$

现在我们假定 $y = f(x)$, 是向上凸的, 也就是

$$y_2 = f(x_2) > \frac{(x_3-x_2)f(x_1) + (x_2-x_1)f(x_3)}{x_3-x_1},$$

即

$$(x_3-x_2)y_1 + (x_1-x_3)y_2 + (x_2-x_1)y_3 < 0. \tag{2}$$

这时候 $g''(x_4) < 0$, 所以 x_4 正是 $g(x)$ 的最大值点.

于是, 立刻建议出第一个方法：如果

$$y_2 > y_1, \quad y_2 > y_3,$$

那末, 我们由公式 (1) 得到 x_4, 在 $x = x_4$ 处做试验得函数 $y = f(x)$ 的值 y_4. 若 $y_4 > y_2$, 取 x_4 作为新的 x_2, 并取其左边最近的 x_i 作为新的 x_1, 右边最近的 x_i 作为新的 x_3. 若 $y_4 \leqslant y_2$, 仍取 x_2 作为新的 x_2, 再同样做下去.

这样, 我们就面临着两个问题：

1) 这个方法做得下去吗? 如果 $x_4 = x_2$, 怎么办?

2) 这个方法能否导致 $f(x)$ 的最大值?

先回答问题 2), 由 (1) 式及 (2) 式得到

$$\begin{aligned} x_4 =& \frac{1}{2}(x_3 + x_2) \\ & - \frac{1}{2}\frac{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(y_2 - y_3)}{(x_3 - x_2)(y_2 - y_1) + (x_2 - x_1)(y_2 - y_3)} \\ & < \frac{1}{2}(x_3 + x_2), \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} x_4 =& \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ & + \frac{1}{2}\frac{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(y_2 - y_1)}{(x_3 - x_2)(y_2 - y_1) + (x_2 - x_1)(y_2 - y_3)} \\ & > \frac{1}{2}(x_1 + x_2). \end{aligned}$$

假定

$$x_1 < x_2 < x_4 < x_3,$$

如果 $y_4 > y_2$, 则函数 $f(x)$ 的最大值所在的区间由 (x_1, x_3) 缩成为 (x_2, x_3); 如果 $y_4 < y_2$, 则缩成为 (x_1, x_4), 而

$$x_4 < \frac{1}{2}(x_3 + x_2).$$

同样处理 $x_4 < x_2$ 的情况.

总起来一句话：每做一次, 区间缩短一次, 从而得到一系列的前一个包着后一个的区间

$$(x_1^{(i)}, x_3^{(i)}), \quad (i = 1, 2, \cdots),$$

因而其极限存在, 记作

$$(x_1^{(0)}, x_3^{(0)})$$

(请注意 $x_1^{(i)}$ 是不降的, $x_3^{(i)}$ 是不升的), 不难证明 $x_1^{(0)}, x_3^{(0)}$ 之一就是我们要找的点 x_0. 此处, 我们不作证明的原因有二: ① 留给读者作练习, ② 下一节所谈的第二方法的证明比这个更深刻.

现在回到问题 1), 当 $x_4 = x_2$ 时, 可以看看 $x_3 - x_2$ 和 $x_2 - x_1$ 哪个大. 如果 $x_2 - x_1$ 较大, 新的点 x_4' 可以按下法取.

(i) 取

$$x_4' = x_2 - \varepsilon.$$

这儿 $\varepsilon > 0$ 是要求的精密度, 然后再用抛物线法做下去. 如果 $f(x_2)$ 与 $f(x_2 - \varepsilon)$ 不易分辨, 则说明 x_2 可能已到顶了, 换取 $x_4'' = x_2 + \varepsilon$. 如果此时还是 $f(x_2) > f(x_2 + \varepsilon)$, 则下一试验点就取在 $x_2 + \varepsilon^2$ 的地方等等.

这样取点法优点是快, 缺点是 ε 难以预估, 试验结果可能难以分辨.

(ii) 取

$$x_4' = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

$\left(\text{若 } x_3 - x_2 \text{ 较大, 则取 } x_4' = \frac{(x_2 + x_3)}{2}\right)$ 这取法速度慢. 假如适逢我们的目标函数就是顶点在 x_2 的抛物线, 那就吃亏了.

为了克服 (i) 和 (ii) 出现的缺点, 可以采取

(iii) 在 (i) 中令

$$\varepsilon = k(x_3 - x_2)^2$$

其中 k 为定常数, 要求其保证无论进行到哪一步都有

$$k(x_3 - x_2)^2 \leqslant \frac{1}{2}(x_3 - x_2),$$

可令 k 为原始区间长度二倍的倒数.

然后取 $x_4' = x_2 + \varepsilon$, 再按抛物线法做下去. 这时显然有 $x_2 < x_4' \leqslant \frac{(x_2 + x_3)}{2}$. 这样, 即照顾到分辨问题, 又照顾到收敛速度同 $x_4 \neq x_2$ 的情况一致.

误 差 估 计

假定函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取最大值, 抛物线法就是建议用上节公式 (1) 算出的 x_4 去近似地代替 x_0, 本节将对误差 $|x_4 - x_0|$ 作出估计.

显然, 如果 x_0 不在区间端点, 则

$$f'(x_0) = 0. \tag{1}$$

由上节公式 (1) 可知

$$x_4 - x_0 = \left[\frac{1}{x_3 - x_1}\left\{\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} - \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}\right\}(x_3 + x_2 - 2x_0) + \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}\right] \Big/ \left[\frac{2}{x_3 - x_1}\left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} - \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}\right)\right],$$

记其分子、分母分别为 N, D, 并令

$$x_i = x_0 + \xi_i \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

则

$$N = \frac{1}{\xi_3 - \xi_1}\left(\frac{y_1 - y_2}{\xi_1 - \xi_2} - \frac{y_3 - y_2}{\xi_3 - \xi_2}\right)(\xi_3 + \xi_2) + \frac{y_3 - y_2}{\xi_3 - \xi_2},$$
$$D = \frac{2}{\xi_3 - \xi_1}\left(\frac{y_1 - y_2}{\xi_1 - \xi_2} - \frac{y_3 - y_2}{\xi_3 - \xi_2}\right).$$

由于

$$\begin{aligned} y_i - y_j &= f(x_0 + \xi_i) - f(x_0 + \xi_j) \\ &= (\xi_i - \xi_j)\int_0^1 f'(x_0 + \xi_j + (\xi_i - \xi_j)t)dt, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} D &= \frac{2}{\xi_3 - \xi_1}\int_0^1 (f'(x_0 + \xi_2(1-t) + \xi_1 t) - f'(x_0 + \xi_2(1-t) + \xi_3 t))dt \\ &= -2\int_0^1\int_0^1 f''(x_0 + \xi_2(1-t) + \xi_1 t\mu + \xi_3(1-\mu)t)td\mu dt. \end{aligned}$$

如果

$$|f''(x)| \geqslant m_2, \tag{2}$$

则有

$$|D| \geqslant m_2. \tag{3}$$

事实上, 我们在上节就已假定曲线 $y = f(x)$ 是向上凸的, 因此 (2) 含有 $f''(x) \leqslant -m_2$, 于是从 D 的表达式得到 (3).

再考虑分子, 类似于上述, 有

$$\begin{aligned} N = &-(\xi_3 + \xi_2)\int_0^1\int_0^1 f''(x_0 + \xi_2(1-t) + \xi_1 t\mu + \xi_3(1-\mu)t)td\mu dt \\ &+ \int_0^1 f'(x_0 + \xi_2(1-t) + \xi_3 t)dt. \end{aligned}$$

但因 $f'(x_0)=0$, 所以

$$\int_0^1 f'(x_0+\xi_2(1-t)+\xi_3 t)dt=\int_0^1 (f'(x_0+\xi_2(1-t)+\xi_3 t)-f'(x_0))dt$$
$$=\int_0^1\int_0^1 f''(x_0+\xi_2(1-t)\mu+\xi_3 t\mu)(\xi_2(1-t)+\xi_3 t)d\mu dt,$$

及

$$\int_0^1\int_0^1 (\xi_2(1-t)+\xi_3 t)d\mu dt=\frac{1}{2}(\xi_2+\xi_3),$$

所以

$$N=-(\xi_3+\xi_2)\int_0^1\int_0^1 (f''(x_0+\xi_2(1-t)+\xi_1 t\mu+\xi_3(1-\mu)t)-f''(x_0))td\mu dt$$
$$+\int_0^1\int_0^1 (f''(x_0+\xi_2(1-t)\mu+\xi_3 t\mu)-f''(x_0))(\xi_2(1-t)+\xi_3 t)d\mu dt. \tag{4}$$

这样, 如果 $|f'''(x)|$ 有界, 即若

$$|f'''(x)|\leqslant k, \tag{5}$$

就有

$$|N|\leqslant|\xi_3+\xi_2|\int_0^1\int_0^1 k|\xi_2(1-t)+\xi_1 t\mu+\xi_3(1-\mu)t|td\mu dt$$
$$+\int_0^1\int_0^1 k|\xi_2(1-t)\mu+\xi_3 t\mu||\xi_2(1-t)+\xi_3 t|d\mu dt$$
$$\leqslant k|\xi_3+\xi_2|\left(\frac{|\xi_2|}{6}+\frac{|\xi_1|}{6}+\frac{|\xi_3|}{6}\right)+k\left(\frac{\xi_2^2}{6}+\frac{\xi_3^2}{6}+\frac{|\xi_3\xi_2|}{6}\right)$$
$$\leqslant k\left(\frac{\xi_2^2}{3}+\frac{\xi_3^2}{3}+\frac{|\xi_2\xi_3|}{2}+\frac{|\xi_3\xi_1|}{6}+\frac{|\xi_2\xi_1|}{6}\right).$$

因此, 我们得到以下结论：如果 $m_2>0$,

$$f''(x)\leqslant -m_2,\quad |f'''(x)|\leqslant k, \tag{6}$$

则有

$$|\xi_4|\leqslant\frac{3k}{2m_2}\max(|\xi_2|^2,|\xi_3|^2,|\xi_2\xi_3|,|\xi_3\xi_1|,|\xi_1\xi_2|), \tag{7}$$

第二种方法

根据上节最后一个不等式, 我们可以求得另一方法, 先用其他方法找到

$$x_1 < x_2 < x_3, \quad x_3 - x_1 < \frac{2m_2}{3k}q$$

及

$$y_2 > y_1, \quad y_2 > y_3.$$

这儿 $0 < q < 1$, 因此

$$|\xi_i| < \frac{2m_2}{3k}q \quad (i = 1,2,3). \tag{1}$$

现在用以下的方法来确定试验点, 当有了 x_{n-2}, x_{n-1}, 和 x_n 之后, 由

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}[(x_{n-1}^2 - x_n^2)y_{n-2} + (x_n^2 - x_{n-2}^2)y_{n-1} + (x_{n-2}^2 - x_{n-1}^2)y_n]/ \\ [(x_{n-1} - x_n)y_{n-2} + (x_n - x_{n-2})y_{n-1} + (x_{n-2} - x_{n-1})y_n]$$

定义 x_{n+1}, 再测出 y_{n+1}, 不管 y_{n-2}, y_{n-1}, y_n 和 y_{n+1} 中谁大谁小, 我们把同一方法用在 x_{n-1}, x_n, x_{n+1} 上, 下面证明这方法一定收敛, 不仅如此, 我们还要证明

$$|\xi_n| < \frac{2m_2}{3k}q^{c_n}, \tag{2}$$

这里 $c_1 = c_2 = c_3 = 1$,

$$c_n = c_{n-2} + c_{n-3} \quad (n = 4, 5 \cdots). \tag{3}$$

由 §2 不等式 (7) 得到

$$|\xi_n| \leqslant \frac{3k}{2m_2}\max(|\xi_{n-3}\xi_{n-2}|, |\xi_{n-2}\xi_{n-1}|, |\xi_{n-1}\xi_{n-3}|, \xi_{n-2}^2, \xi_{n-1}^2) \tag{4}$$

因为 c_n 是一个不降的整数列, 所以

$$\min(c_{n-3} + c_{n-2}, c_{n-2} + c_{n-1}, c_{n-1} + c_{n-3}, 2c_{n-2}, 2c_{n-1}) = c_{n-3} + c_{n-2} \tag{5}$$

由 (1) 知道不等式 (2) 当 $n = 1,2,3$ 时成立, 为了完成 (2) 的证明, 只要用数学归纳法就可以了, 事实上, 假设不等式 (2) 对 $n = 1, 2, \cdots, k-1$ 都成立, 那么由 (4), (5) 两式得到

$$\begin{aligned}|\xi_k| &< \frac{3k}{2m_2}\left(\frac{2m_2}{3k}\right)^2 q^{\min(c_{k-3}+c_{k-2}, c_{k-2}+c_{k-1}, c_{k-1}+c_{k-3}, 2c_{k-2}, 2c_{k-1})} \\ &= \frac{2m_2}{3k}q^{c_{k-3}+c_{k-2}}.\end{aligned}$$

即

$$|\xi_k| < \frac{2m_2}{3k}q^{c_k}.$$

C_n 的表达式

现在我们研究适合于

$$c_{n+1} = c_{n-1} + c_{n-2}, \quad c_0 = c_1 = c_2 = 1$$

的 c_n 的表达式. 先算出几项来:

$$1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, 49, \cdots,$$

求 c_n 的方法同第一章 §2 一样. 令

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

由

$$(1-x^2-x^3)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 1 + x + x^2 + \sum_{m=0}^{\infty} c_{m+3} x^{m+3}$$
$$- x^2 - \sum_{m=0}^{\infty} c_{m+1} x^{m+3} - \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+3} = 1 + x,$$

得到

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x^2-x^3}.$$

令

$$1 - x^2 - x^3 = (1-w_1x)(1-w_2x)(1-w_3x),$$

即 w_i 是方程式

$$y^3 - y - 1 = 0$$

的根, 这方程有一个大于 1 的实根 $w_1 = 1.324\cdots$ 及两个绝对值小于 1 的共轭虚根.

用分项分数法,

$$f(x) = \frac{A_1}{1-w_1x} + \frac{A_2}{1-w_2x} + \frac{A_3}{1-w_3x}, \tag{1}$$

这儿

$$A_i = \lim_{x\to\frac{1}{w_i}} (1-w_ix)\frac{1+x}{1-x^2-x^3} = \left.\frac{(1+x)w_i}{2x+3x^2}\right|_{x=\frac{1}{w_i}}$$
$$= \frac{(1+w_i)w_i^2}{2w_i+3}.$$

由 (1) 式得出

$$c_n = A_1 w_1^n + A_2 w_2^n + A_3 w_3^n.$$

因为

$$\lim_{n\to\infty} w_2^n = \lim_{n\to\infty} w_3^n = 0$$

所以

$$c_n \sim A_1 w_1^n$$

于是, 我们有以下的收敛结果

$$|\xi_n| \leqslant cq w_1^n,$$

即 n 又升高了一个台阶.

附记 在考虑抛物线法的收敛速度时, 如果把条件 $|f'''(x)| \leqslant k$ 换作

$$|f''(x'') - f''(x')| \leqslant k|x'' - x'|$$

或者说 $f''(x) \in \mathrm{Lip}1$, 自然是可以的. 或许有的读者会提出 $f''(x) \leqslant -m_2$, 不易验证, 那末把它换作初始三点 x_1, x_2, x 上 $f(x)$ 的二阶差分

$$\frac{2}{x_3 - x_1}\left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} - \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}\right) \geqslant m_2 > 0 \tag{2}$$

也是可以的, 这就表明, 对于给定的 f, 开始用其他方法安排, 一旦条件 (2) 适合时, 再用抛物线法, 收敛速度就更快了, 例如, 此时若 $x_3 - x_1 \leqslant \dfrac{2m_2}{3k}q, 0 < q < 1$, 就易于证明

$$|x_n - x_0| \leqslant \frac{2m_2}{3k}q^{c_n}, \quad c_1 = c_2 = c_3 = 1,$$
$$c_n = c_{n-2} + c_{n-3} \quad (n = 4, 5, \cdots).$$

第三种方法

从三点 $x_1 < x_2 < x_3$ 出发, 有了 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 之后要去找 x_{n+1}, 在具体应用抛物线法时, 除前面讲的两个办法之外, 我们再建议用如下的算法:

1) 先从三点 $x_1 < x_2 < x_3$ 出发, 并假定 $y_1 < y_2, y_3 < y_2$, 即中间高, 两头低, 定义

$$a_3 = x_1, \quad b_3 = x_3, \quad c_3 = x_2, \quad a_3 < c_3 < b_3.$$

2) 有了 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 之后, 假定 $y_1, y_2, \cdots y_n$ 中最大的一个在 $x = c_n$ 处取, 左边较大的一个在 $x = a_n$ 处取, 右边较大的一个在 $x = b_n$ 处取, 即

$$a_n < c_n < b_n, f(c_n) > f(a_n), f(c_n) > f(b_n).$$

3) 令 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 中最大的三个数为

$$\eta_1 = f(\xi_1) > \eta_2 = f(\xi_2) > \eta_3 = f(\xi_3)$$

由 (2) 可知 $\xi_1 = c_n, \xi_2$ 是 a_n, b_n 之一, ξ_3 或是 a_n, b_n 之另一个, 或在 a_n 之左或在 b_n 之右. 由这三个值作

$$\begin{aligned}
\Delta\xi_3 &= \xi_3 - \xi_2,\\
A\xi_3 &= \frac{1}{2}(\xi_3 + \xi_2),\\
\Delta\eta_3 &= \eta_3 - \eta_2,\\
\Delta\xi_2 &= \xi_2 - \xi_1,\\
A\xi_2 &= \frac{1}{2}(\xi_2 + \xi_1),\\
\Delta\eta_2 &= \eta_2 - \eta_1.
\end{aligned}$$

再算出 (参看 §1, (1))

$$x^*_{n+1} = \frac{A\xi_3\Delta\xi_3\Delta\eta_2 - A\xi_2\Delta\xi_2\Delta\eta_3}{\Delta\xi_3\Delta\eta_2 - \Delta\xi_2\Delta\eta_3} \tag{1}$$

4) x_{n+1} 的定义如下

$$x_{n+1} = \begin{cases} x^*_{n+1}, & 若\ a_n < x^*_{n+1} < b_n, x^*_{n+1} \neq c_n.\\ x^*_{n+1} - \varepsilon, & 若\ x^*_{n+1} = c_n, c_n - a_n \geqslant b_n - c_n.\\ x^*_{n+1} + \varepsilon, & 若\ x^*_{n+1} = c_n, b_n - c_n > c_n - a_n.\\ \dfrac{1}{2}(a_n + c_n), & 若\ x^*_{n+1} \leqslant a_n.\\ \dfrac{1}{2}(c_n + b_n), & 若\ x^*_{n+1} \geqslant b_n.\end{cases}$$

试验出 $y_{n+1} = f(x_n + 1)$ 的值, 归纳法继续进行, 这里 ε 是个适当小的数, 但应该 $x^*_{n+1} + \varepsilon$ 若 $x^*_{n+1} - \varepsilon$ 与 x^*_{n+1} 的试验结果有所区别.

附记 1) 由以上的理论研究可知, 到充分多次后, 实质上总是 $x_{n+1} = x^*_{n+1}$.

2) 公式 (1) 的几何意义如下：令

$$X = \frac{A\xi_3\Delta\xi_3\Delta\eta_2 - A\xi_2\Delta\xi_2\Delta\eta_3}{\Delta\xi_3\Delta\eta_2 - \Delta\xi_2\Delta\eta_3},$$

即得

$$\frac{X - A\xi_3}{\Delta\xi_2}\Delta\eta_2 = y = \frac{X - A\xi_2}{\Delta\xi_3}\Delta\eta_3$$

左边表示通过 $\left(\frac{1}{2}(\xi_3 + \xi_2), 0\right)$ 且平行于 $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2)$ 的联线的直线, 右边表示

通过 $\left(\dfrac{1}{2}(\xi_1+\xi_2),0\right)$ 且平行于 $(\xi_2,\eta_2),(\xi_3,\eta_3)$ 的联线的直线, 这两条直线的交点的横坐标就是 x_{n+1}^*.

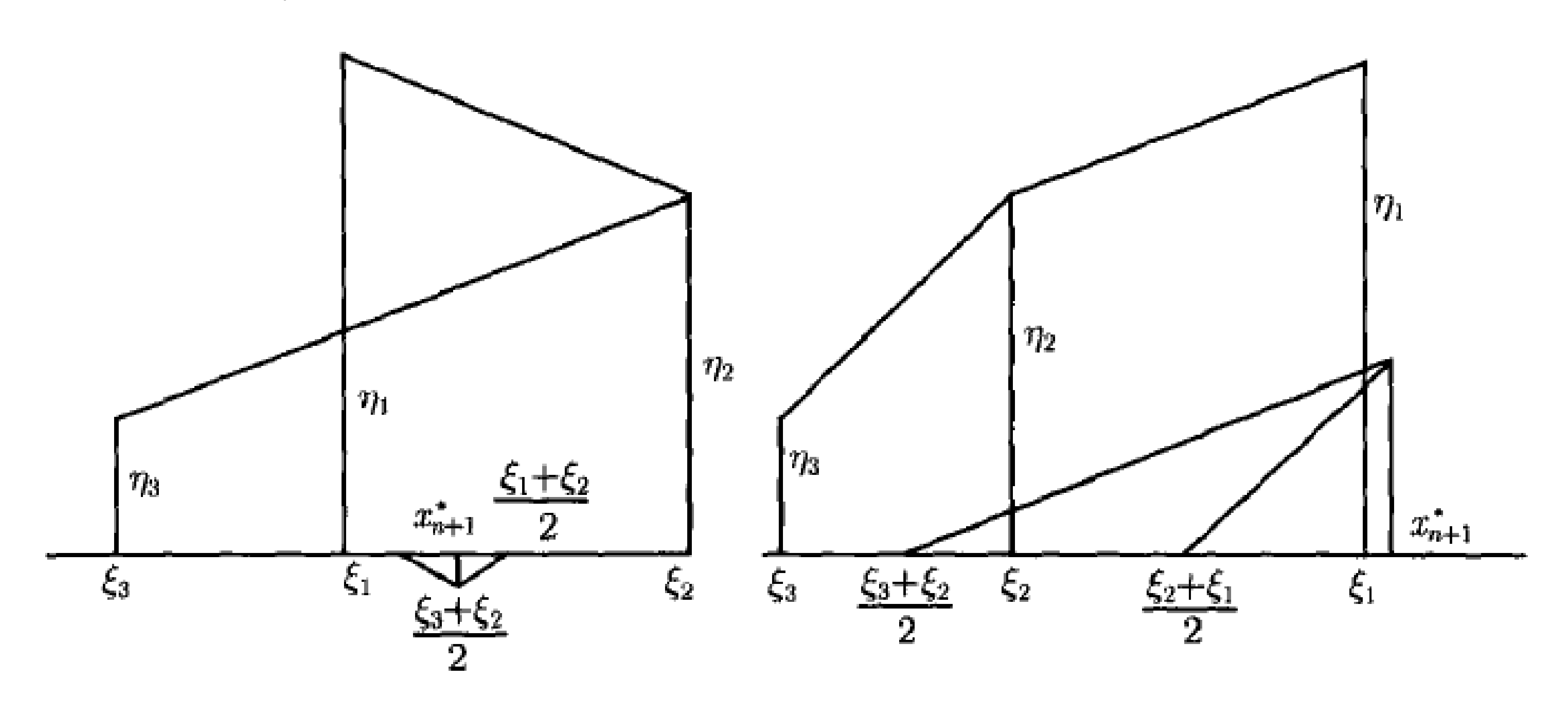


图 12

这就是从抛物线上三点找出顶点的方法.

分批试验及其他

述　　要

在生产和科学实验中, 往往有这样的情况: 做完一个试验要较长的时间才能看到结果. 若等上次试验结果出来后, 才进行下次试验, 则要花费较多的时间. 如果试验还要进行多次, 那末消耗的时间将更多. 为加速试验的进行, 常常采用一批同时做几个试验的的方法.

例如, 一批做四个试验, 共做两批, 我们可以用如下的三种方法安排:

1) ○○*○○*○○*○○*○○

2) ○○○*○*○○○*○*○○○

3) ○○○○**○○○○**○○○○

在打 * 的四点做第一批试验, 然后在较好的一点附近四个打 ○ 的点处做第二批试验. 我们看到第三种方法共区别 16 个点, 可以区别的点数最多, 但由于两对试验点的距离很近, 试验的结果可能不易辨别好坏, 甚至会出现这样的情况: 由于观察的误差, 好的一段反而被去掉了. 第一种方法少区别两个点, 但第一批试验的点分布均匀, 可以避免上述情况, 所以人们常常采用第一种方法.

对于每批做偶数个试验的安排是类似的. 如果每批试验的个数是奇数, 则安排便有所不同了, 例如, 每批做三个试验, 做两批, 也有三种方法:

1) ○○○**○○○*

2) ○○○***○○○

3) ○○*○*○○*○

它们都可以区别九个点, 但每种方法都有其特点, 与每批做四个试验的情况类似, 第一种方法的第四点、第五点试验结果可能不易分辨, 而第九点则没有充分发挥作用, 如果这么靠近还可以分辨, 那末还是采用第二种方法好, 因为在第一批试验中, 如果第五点的结果好, 它便是最好点, 省去一批试验. 第三种方法是为了避免出现试验点太靠近而考虑的, 不过, 如果要考虑做三批以上的试验, 则第一种方法又是常采用的.

从上述二例说明, 在一批做好几个试验的时候, 必须根据实际情况, 选择适当的安排方法.

试验方案优劣的衡量标准

在衡量分批试验方案优劣时, 往往 "一般地" 采用留下区间的长度或最好试验点距留下区间端点的最大距离作为误差 (或精度), 使之最小. 在前面的假定下, 我们在 [0,1] 区间中点附近相距极小的两点做试验:

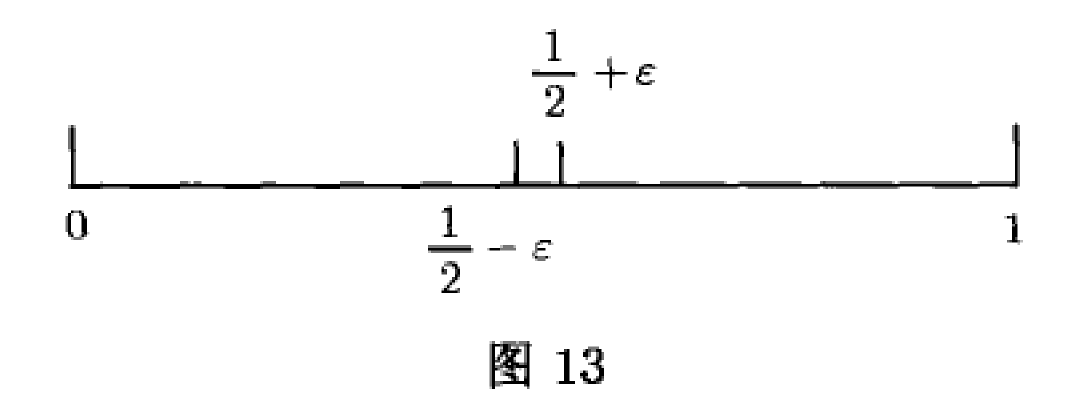


图 13

便可去掉区间的 $1/2-\varepsilon$. 于是, 也就不可避免地引入 "在同一点作两个试验可以去掉区间一半" 等这样纯数学的假设.

我们从实际应用出发, 要求: 最后一批试验点和上批留下的较好点等分上批试验后所留下的区间. 这样使得全部试验结束后, 所找到的最好试验点, 距留下区间端点距离相等. 在上述前提下, 我们用最好试验点与留下区间端点的距离作为误差, 并使之最小.

一组特殊的方程组的解法

给出方程组

$$\begin{cases} 1 = a_0 = \lambda_1 a_1 + \mu_1 a_2, \\ a_1 = \lambda_2 a_2 + \mu_2 a_3, \\ a_2 = \lambda_3 a_3 + \mu_3 a_4, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{l-1} = \lambda_l a_l + \mu_l a_{l+1}, \\ a_l = a_{l+1}, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l; \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_l$ 为已知数, $a_1, a_2, \cdots, a_{l+1}$ 为待求数.

此方程组固然可以用最后一方程代入上一方程, 解出 $a_{l-1} = (\lambda_l + \mu_l)a_{l+1}$, 然后又代入前一方程, $\cdots$, 最后解出 a_{l+1}. 此方法较烦琐, 我们可采用如下巧妙的方法:

令

$$\frac{a_m}{a_{m+1}} = v_m, \tag{2}$$

则 (1) 化为

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a_1} = v_0 = \lambda_1 + \dfrac{\mu_1}{v_1} \\ v_1 = \lambda_2 + \dfrac{\mu_2}{v_2} \\ v_2 = \lambda_3 + \dfrac{\mu_3}{v_3} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_{l-1} = \lambda_l + \dfrac{\mu_l}{v_l} \\ v_l = 1 \end{cases} \tag{3}$$

由 (3), 可将 $v_0, v_1, \cdots, v_l$ 表为连分数:

$$\begin{cases} v_l = 1 \\ v_{l-1} = \lambda_l + \dfrac{\mu_l}{v_l} = \lambda_l + \mu_l \\ v_{l-2} = \lambda_{l-1} + \dfrac{\mu_{l-1}}{v_{l-1}} = \lambda_{l-1} + \dfrac{\mu_{l-1}}{\lambda_l - \mu_l} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_2 = \lambda_3 + \dfrac{\mu_3}{\lambda_4} + \dfrac{\mu_4}{\lambda_5} + \cdots + \dfrac{\mu_{l-1}}{\lambda_1 + \mu_l} \\ v_1 = \lambda_2 + \dfrac{\mu_2}{\lambda_3} + \dfrac{\mu_3}{\lambda_4} + \cdots + \dfrac{\mu_{l-1}}{\lambda_l + \mu_l} \\ v_0 = \lambda_1 + \dfrac{\mu_1}{\lambda_2} + \dfrac{\mu_2}{\lambda_3} + \cdots + \dfrac{\mu_{l-1}}{\lambda_l + \mu_l} \end{cases} \tag{4}$$

令

$$F_0 = F_1 = 1, \quad F_{m+1} = \lambda_{l-m+1} F_m + \mu_{l-m+1} F_{m-1} \tag{5}$$

$$(m = 1, 2, \cdots, l)$$

则由 (4) 得

$$\begin{cases} v_l = \dfrac{F_1}{F_0} \\ v_{l-1} = \dfrac{F_2}{F_1} \\ v_{l-2} = \dfrac{F_3}{F_2} \\ \cdots\cdots\cdots \\ v_2 = \dfrac{F_{l-1}}{F_{l-2}} \\ v_1 = \dfrac{F_l}{F_{l-1}} \\ v_0 = \dfrac{F_{l+1}}{F_l} \end{cases} \tag{6}$$

由 (2) 和 (6),

$$a_k = \frac{1}{v_0 \cdot v_1 \cdots v_{k-1}} = \frac{F_l}{F_{l+1}} \cdot \frac{F_{l-1}}{F_l} \cdot \cdots \cdot \frac{F_{l-k+1}}{F_{l-k+2}} = \frac{F_{l-k+1}}{F_{l+1}}$$

$(k = 1, 2, \cdots, l+1)$, 即有

$$\begin{cases} a_0 = 1 = F_{l+1} \cdot a_l \\ a_1 = \dfrac{F_l}{F_{l+1}} = F_l \cdot a_l \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_k = \dfrac{F_{l-k+1}}{F_{l+1}} = F_{l-k+1} \cdot a_l \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{l-1} = \dfrac{F_2}{F_{l+1}} = F_2 \cdot a_l \\ a_l = a_{l+1} = \dfrac{1}{F_{l+1}} \end{cases} \tag{7}$$

每批作奇数个试验, 如何安排

试验范围 $a_0 = 1$, 共做 l 批试验第一批 k_1 个试验, 第二批 k_2 个试验, $\cdots$, 第 l 批 k_l 个试验, 其中 $k_1, k_2, \cdots, k_l$ 均为奇数. 试验安排方案如下:

把 a_0 分为长度为 $a_1, a_2 (a_1 \geqslant a_2)$ 互相间隔的 $(k_l + 1)$ 个小区间:

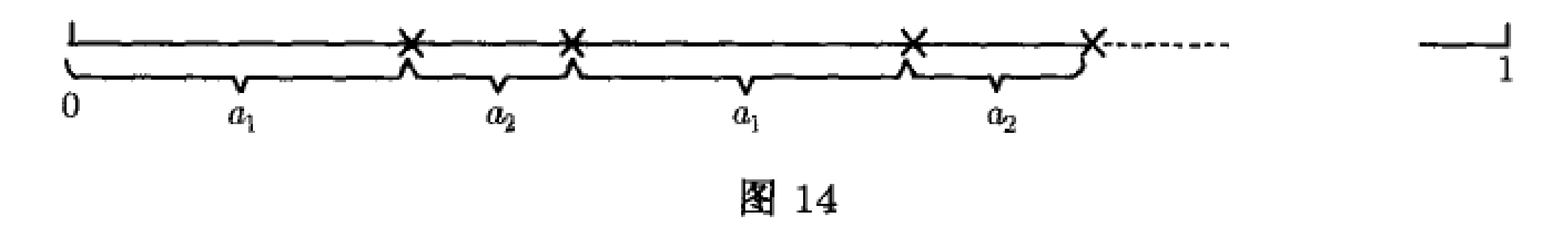


图 14

试验后留下包含取较大值试验点的区间:



图 15

第二批 k_2 个试验全部安排在长度为 a_1 的区间里, 并把 a_1 分成长度为 $a_2, a_3 (a_2 \geqslant a_3)$ 互相间隔的 $(k_2 + 1)$ 个小区间:

$$a_2 a_3 a_2 a_3 \cdots a_2 a_3 * a_2 \text{ 或 } a_2 * a_3 a_2 \cdots a_3 a_2$$

试验后又留下包含取较大值试验点的区间:

$$a_2 a_3 \text{ 或 } a_3 a_2$$

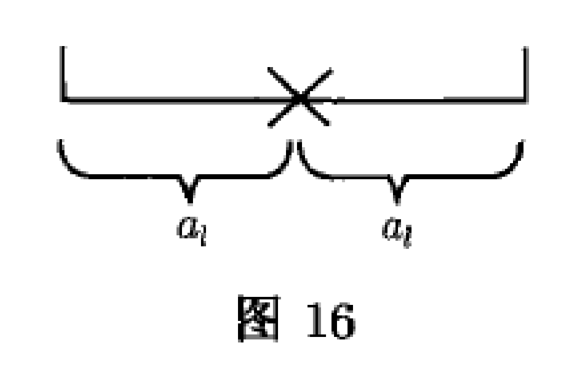


图 16

把下批试验全部安排在较长区间里, 并把其区间分为长短相间的 (k_3+1) 个小区间, 等等. 根据 §1 的要求, 第 l 批的 k_l 个试验点要将 a_{l_1} 分为与 a_l 相等的 (k_l+1) 个小区间, 最后留下此处的 a_l 即为我们所定义的误差.

把上述的 $\{a_m\}$ 的关系写为数学表达式, 就是 §2 方程 (1) 的形式, 其中

$$\begin{cases} \lambda_m = \dfrac{k_m+1}{2} \quad (m=1,2,\cdots,l), \\ \mu_m = \dfrac{k_m+1}{2} \quad (m=1,2,\cdots,l). \end{cases} \tag{1}$$

根据 §2 中 (7) 式可以算出 a_m, 而误差 $a_l = \dfrac{1}{F_{l+1}}$, F_{l+1} 由下面的递推公式确定:

$$\begin{cases} F_0 = F_1 = 1, \\ F_{m+1} = \dfrac{k_{l-m+1}+1}{2}(F_m + F_{m-1}) \quad (m=1,2,\cdots,l). \end{cases} \tag{2}$$

下面举几个特例:

例 1　只作一批 k 个试验.

由 (2) 式得

$$F_0 = F_1 = 1, \quad F_2 = k+1.$$

再由 §2 中 (7) 式知

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{1}{F_2} = \frac{1}{k+1},$$

即 k 个试验点把区间 a_0 分为 $(k+1)$ 等分, 试验误差

$$a_2 = \frac{1}{k+1}.$$

例 2　共作 l 批, 每批作一个试验

由 (2) 式得

$$\begin{cases} F_0 = F_1 = 1, \\ F_{m+1} = F_m + F_{m-1} \quad (m=1,2,\cdots,l). \end{cases}$$

这就是通常的分数法. 试验误差为 $a_l = \dfrac{1}{F_{l+1}}$.

例 3　每批作 $(2t-1)$ 个试验, 共作 k 批.

这时 (2) 式变为

$$\begin{cases} F_0 = F_1 = 1, \\ F_{m+1} = t(F_m + F_{m-1}) \quad (m = 1, 2, \cdots, k). \end{cases}$$

用第一章 §2 的方法, 可得

$$F_{m+1} = \frac{1}{2}\left(1 + 3\sqrt{\frac{4}{t+4}}\right)\left[\frac{t+\sqrt{t(t+4)}}{2}\right]^m + \frac{1}{2}\left(1 - 3\sqrt{\frac{t}{t+4}}\right)\left[\frac{t-\sqrt{t(t+4)}}{2}\right]^m. \tag{3}$$

且有

$$a_1 = \frac{F_k}{F_{k+1}},$$
$$a_2 = \frac{F_{k-1}}{F_{k+1}},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_k = a_{k+1} = \frac{1}{F_{k+1}}.$$

试验误差为 $a_{k+1} = \dfrac{1}{F_{k+1}}$.

每批作偶数个试验, 如何安排

设第一批 k_1 个试验, 第二批 k_2 个试验, $\cdots$, 第 l 批 k_l 个试验, $k_1, k_2, \cdots, k_l$ 皆为偶数. 把试验区间 $a_0(=1)$ 分为长度是 $a_1, a_{l+1}(a_1 \geqslant a_{l+1})$ 互相间隔的 (k_1+1) 个小区间:

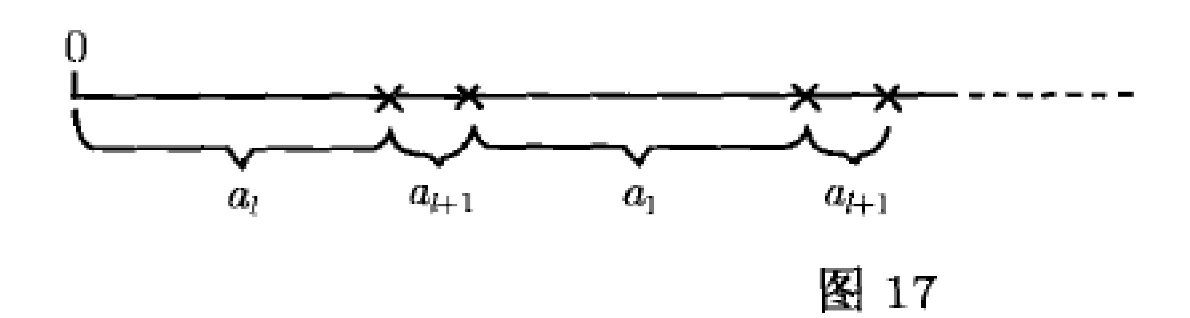




图 17

第二批试验全部安排在长为 a_1 的小区间, 并把 a_1 分为长度 $a_2, a_{l+1}(a_2 \geqslant a_{l+1})$ 互相间隔的 (k_2+1) 个小区间, 等等. 根据 §1 的要求, 第 l 批的 k_l 个试验要将区间 a_{l-1} 分为与 a_{l+1} 相等的 $k_l + 1$ 个小区间:

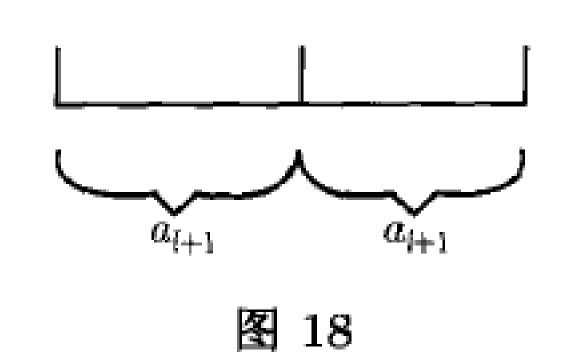


图 18

此处 a_{l+1} 即为我们所定义的误差.

把上述的 $\{a_m\}$ 的关系写成数学表达式:

$$\begin{cases} 1 = a_0 = \left(\frac{k_1}{2}+1\right)a_1 + \frac{k_1}{2}a_{l+1}, \\ a_1 = \left(\frac{k_2}{2}+1\right)a_2 + \frac{k_2}{2}a_{l+1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{l-1} = \left(\frac{k_l}{2}+1\right)a_l + \frac{k_l}{2}a_{l+1}, \\ a_l = a_{l+1}. \end{cases} \tag{1}$$

或

$$a_{m-1} + a_{l+1} = \left(\frac{k_m}{2}+1\right)(a_m + a_{l+1}) \tag{2}$$

所以

$$\begin{aligned} 1 + a_{l+1} &= a_0 + a_{l+1} \\ &= \left(\frac{k_1}{2}+1\right)\left(\frac{k_2}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{k_l}{2}+1\right)(a_l + a_{l+1}). \end{aligned}$$

$$a_{l+1} = \frac{1}{2\left(\frac{k_1}{2}+1\right)\left(\frac{k_2}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{k_l}{2}+1\right)-1}. \tag{3}$$

再由

$$1 + a_{l+1} = a_0 + a_{l+1} = \left(\frac{k_1}{2}+1\right)\left(\frac{k_2}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{k_m}{2}+1\right)(a_m + a_{l+1}),$$

可以算出 $a_m(m = 1, 2, \cdots, l)$.

$$\begin{aligned} a_m = &\left[2\left(\frac{k_{m+1}}{2}+1\right)\left(\frac{k_{m+2}}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{k_{m+l}}{2}+1\right)-1\right] \Big/ \\ &\left[2\left(\frac{k_1}{2}+1\right)\left(\frac{k_2}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{k_l}{2}+1\right)-1\right]. \end{aligned} \tag{4}$$

例　每批作 $2t$ 个试验, 共做 l 批.

由 (3) 及 (4) 得

$$a_{l+1} = \frac{1}{2(t+1)^l - 1},$$

$$a_m = \frac{2(t+1)^{l-m} - 1}{2(t+1)^l - 1}.$$

一般情形，如何安排

和 §3, §4 方法一样. 若第 $(m-1)$ 批后留下区间为

a_{m-1} a_p

图 19

$(a_{m-1} \geqslant a_p)$, 则第 m 批试验点全部安排在较长区间 a_{m-1} 内. 当 k_m 是奇数时, $a_p = a_m$; 当 k_m 是偶数时, $a_p = a_{m+i}, k_{m+i}$ 是 $k_{m+1}, k_{m+2}, \cdots$ 中出现的第一个奇数.

具体地说, 设 $k_1, k_2, \cdots, k_l$ 中的奇数依次为 $k_{i_1}, k_{i_2}, \cdots, k_{i_t}$, 则各区间长度的数学表达式为:

$$\left\{\begin{array}{l} 1 = a_0 = \left[\dfrac{k_1}{2}+1\right] a_1 + \left[\dfrac{k_1}{2}\right] a_{i_1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i_1-2} = \left[\dfrac{k_{i_1}-1}{2}+1\right] a_{i_1-1} + \left[\dfrac{k_{i_1-1}}{2}\right] a_{i_1}, \\ a_{i_1-1} = \left[\dfrac{k_{i_1}}{2}+1\right] a_{i_1} + \left[\dfrac{k_{i_1}}{2}+1\right] a_{i_2}, \\ a_{i_1} = \left[\dfrac{k_{i_1+1}}{2}+1\right] a_{i_1+1} + \left[\dfrac{k_{i_1+1}}{2}\right] a_{i_2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i_2-2} = \left[\dfrac{k_{i_2-1}}{2}+1\right] a_{i_2-1} + \left[\dfrac{k_{i_2-1}}{2}\right] a_{i_2}, \\ a_{i_2-1} = \left[\dfrac{k_{i_2}}{2}+1\right] a_{i_2} + \left[\dfrac{k_{i_2}}{2}+1\right] a_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_l = a_{l+1}. \end{array}\right. \quad (1)$$

同 §4 一样, 可以把偶数次的试验合并写成

$$\left\{\begin{array}{l} 1 = a_0 = \left[\dfrac{k_1}{2}+1\right]\left[\dfrac{k_2}{2}+1\right]\cdots\left[\dfrac{k_{i_1-1}}{2}+1\right](a_{i_1-1}+a_{i_1}) - a_{i_1}, \\ a_{i_1-1} = \left[\dfrac{k_{i_1}}{2}+1\right] a_{i_1} + \left[\dfrac{k_{i_1}}{2}+1\right] a_{i_2}, \\ a_{i_1} = \left[\dfrac{k_{i_1+1}}{2}+1\right]\left[\dfrac{k_{i_1+2}}{2}+1\right]\cdots\left[\dfrac{k_{i_2-1}}{2}+1\right](a_{i_2-1}+a_{i_2}) - a_{i_2}, \\ a_{i_2-1} = \left[\dfrac{k_{i_2}}{2}+1\right] a_{i_2} + \left[\dfrac{k_{i_2}}{2}+1\right] a_{i_3}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i_t} = \left[\dfrac{k_{i_t+1}}{2}+1\right]\left[\dfrac{k_{i_t+2}}{2}+1\right]\cdots\left[\dfrac{kl}{2}+1\right](a_l+a_{l+1}) - a_{l+1}, \\ a_l = a_{l+1}. \end{array}\right. \quad (2)$$

进一步可简化成 (记 $i_{t+1}=l$)

$$\left\{\begin{array}{l} 1=a_0=\lambda_1 a_{i_1}+\mu_1 a_{i_2},\\ a_{i_1}=\lambda_2 a_{i_2}+\mu_2 a_{i_3},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{i_t}=\lambda_{t+1}a_l+\mu_{t+1}a_{l+1},\\ a_l=a_{l+1}. \end{array}\right. \tag{3}$$

在这里,

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_m=\left[\dfrac{k_{i_{m-1}+1}}{2}+1\right]\left[\dfrac{k_{i_{m-1}+2}}{2}+1\right]\cdots\left[\dfrac{k_{i_m-1}}{2}+1\right]\left[\dfrac{k_{i_m}}{2}+2\right]-1,\\ \mu_m=\left[\dfrac{k_{i_{m-1}+1}}{2}+1\right]\cdots\left[\dfrac{k_{i_m-1}}{2}+1\right]\left[\dfrac{k_{i_m}}{2}+1\right],\quad (m=1,2,\cdots,t;i_0=0)\\ \lambda_{t+1}=\left[\dfrac{k_{i_t+1}}{2}+1\right]\cdots\left[\dfrac{k_l}{2}+1\right]-1,\\ \mu_{t+1}=\left[\dfrac{k_{i_t+1}}{2}+1\right]\cdots\left[\dfrac{k_l}{2}+1\right]. \end{array}\right. \tag{4}$$

用 §2 的方法, 可以算出误差 a_l 以及 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_t}$. 进而由 (1) 可以算出所有的 $\{a_m\}$.

令

$$\begin{gathered} F_0=F_1=1,\\ F_{m+1}=\lambda_{t-m+1}F_m+\mu_{t-m+1}F_{m-1}\\ (m=1,2,\cdots,t), \end{gathered} \tag{5}$$

则误差为

$$a_l=\frac{1}{F_{t+1}}.$$

读者可能会问, 是否还有其他方法使得误差 (或精密度) 更小一些? 这个问题的回答是否定的, 对于单峰函数的全体而言, 精度不能再好了. 这里不再详细讨论, 请读者自己证明. 例如, 可以参考第一章 §5 的方法, 先建立一批不等式, 然后用归纳法证明.

试验批数不定的情形

有时, 虽然每批试验的次数一定, 但是试验的批数并不能预先给定, 要求试验可以连续做下去, 怎么办?

先讨论每批做偶数 $(2t)$ 个试验的情形.

由 §4 的例, 每批作 $2t$ 个试验, 共做 k 批, 第一个试验点在

$$a_1 = \frac{2(t+1)^{k-1} - 1}{2(t+1)^k - 1},$$

第二个试验点在

$$a_1 + a_{k+1} = \frac{2(t+1)^{k-1}}{2(t+1)^k - 1}.$$

当 $k \to \infty$ 时, 二试点位置都趋于 $\frac{1}{t+1}$. 由此可见, 这个方法当 $k \to \infty$ 时是完全失败的. 也就是说, 预先给定的批数 k 越大, 两点越近, 分辨起来越困难, 正因为如此, 我们建议用下面的方法来安排.

先把试验范围等分为 $(2t+1)$ 段, 在 $2t$ 个分点上做第一批试验, 比较结果, 留下较好的点 $*$ 及其左右一段, 然后把这二段都等分为 $(t+1)$ 段, 在分点处做第二批试验等等, 下图表明了 $t=2$ 的情况:

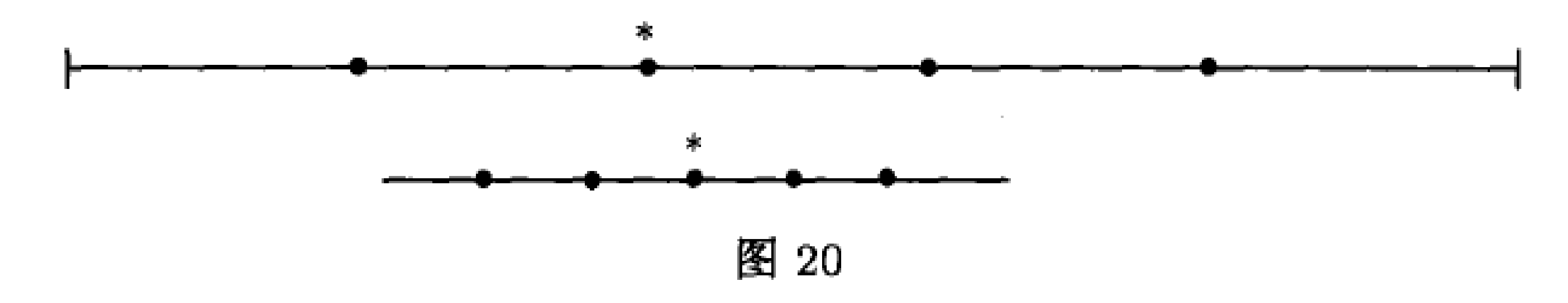


图 20

值得指出, 根据实际情况, 我们可以用混合的方法来安排, 也就是先用 §1 的方法, 做到某一预定的程度后, 还可细分时, 再用上述方法.

再讨论每批做奇数 $(2t-1)$ 个试验的情形.

由 §3 的例 3, 每批作 $(2t-1)$ 个试验, 共做 k 批, 第一个试验点在

$$\begin{aligned} a_1 = \frac{F_k}{F_{k+1}} = & \left\{ \frac{1}{2}\left(1 + 3\sqrt{\frac{t}{t+4}}\right)\left[\frac{t+\sqrt{t(t+4)}}{2}\right]^{k-1} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}\left(1 - 3\sqrt{\frac{t}{t+4}}\right)\left[\frac{t-\sqrt{t(t+4)}}{2}\right]^{k-1} \right\} \Big/ \\ & \left\{ \frac{1}{2}\left(1 + 3\sqrt{\frac{t}{t+4}}\right)\left[\frac{t+\sqrt{t(t+4)}}{2}\right]^{k} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}\left(1 - 3\sqrt{\frac{t}{t+4}}\right)\left[\frac{t-\sqrt{t(t+4)}}{2}\right]^{k} \right\}. \end{aligned}$$

当 $k \to \infty$ 时, 它趋于

$$\theta = \frac{2}{t + \sqrt{t(t+4)}} = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{\frac{t+4}{t}}\right).$$

同样可以得出, 第二个试验点与第一个试验点的距离

$$a_2 = \frac{F_{k-1}}{F_{k+1}}.$$

当 $k \to \infty$ 时, 它趋于

$$\theta^2 = \left[\frac{2}{t + \sqrt{t(t+4)}}\right]^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{t+2}{t} - \sqrt{\frac{t+4}{t}}\right).$$

容易看出

$$\theta + \theta^2 = \frac{1}{t}.$$

这样, 对每批做 $(2t-1)$ 个试验, 我们可以按上式取 θ, 即

$$\theta = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{\frac{t+4}{t}}\right),$$

先把试验范围分成 $2t$ 段, 其长度比是

$$\theta : \theta^2 : \theta : \theta^2 : \cdots : \theta : \theta^2.$$

在分点做第一批试验后, 余下是

$$\theta : \theta^2 \text{ 或 } \theta^2 : \theta.$$

由于对称关系, 只讨论前者.

因为

$$t(\theta^2 + \theta^3) = t\theta(\theta + \theta^2) = \theta,$$

故把长为 θ 的一段分为 $2t$ 段, 其长度比是

$$\theta^2 : \theta^3 : \theta^2 : \theta^3 : \cdots : \theta^2 : \theta^3.$$

再在分点处做第二批试验, 余下是

$$\theta^2 : \theta^3 \text{ 或 } \theta^3 : \theta^2.$$

因为

$$t(\theta^3 + \theta^4) = t(\theta + \theta^2)\theta^2 = \theta^2,$$

又可把长为 θ^2 的一段分为 $2t$ 段, 再做第三批试验, 等等. 如此做下去, 直到合乎要求为止.

这个方法是黄金分割法的推广, $t=1$ 时, 就是黄金割法 (一次做一个试验).

最后, 看看这个方法的精度如何?

记 $l_k^{(i)}$ 为每批做 i 个试验, 共做 K 批后余下的区间长度. 对于 $i=2t$ 的情形, 有

$$l_1^{(2t)}=\frac{2}{2t+1},$$
$$l_2^{(2t)}=\frac{2}{2t+1}\cdot\frac{1}{t+1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$l_k^{(2t)}=\frac{2}{2t+1}\cdot\left(\frac{1}{t+1}\right)^{k-1}.$$

对于 $i=2t-1$ 的情形, 有

$$l_1^{(2t-1)}=\theta+\theta^2=\frac{1}{t},$$
$$l_2^{(2t-1)}=\theta^2+\theta^3=\frac{\theta}{t},$$
$$l_3^{(2t-1)}=\theta^3+\theta^4=\frac{\theta^2}{t},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$l_k^{(2t-1)}=\theta^k+\theta^{k+1}=\frac{\theta^{k-1}}{t}.$$

是否最好的安排

上面几节讲的分批试验法是黄金分割法和分数法的自然推广, 因而第一章里的许多概念和方法都可以平行移过来用.

现在我们对 §6 的方法作进一步的讨论.

仍然先讨论每批做 $2t$ 个试验的情况.

我们的方法着眼于: 做一批试验以后, 进行比较, 只留下一个区间, 其中包含已经做过的、结果最好的那个试验点, 也即如下图的形式. 我们将它放大适当倍数, 使留下的区间为 $(0,1)$, 其中 θ 处是做过试验的点. 现在的问题是: 再同时做 $2t$ 个试验, 这 $2t$ 个点布置在何处, 使下一次留下的区间尽可能短?



图 21

连同上次留下的已试验点, 共有 $(2t+1)$ 个试验点, 设安排在 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{2n+1}$ 处, 如果最好的在 θ_p, 则下次试验将在

$$\theta_{p-1}<\theta<\theta_{p+1}$$

中做, 因此下次试验的区间长度应当是

$$T=\max_{1\leqslant p\leqslant 2t+1}(\theta_{p+1}-\theta_{p-1}),\quad \theta_0=0,\quad \theta_{2t+2}=1.$$

由于

$$\begin{aligned}T&=\max_{1\leqslant p\leqslant 2t+1}(\theta_{p+1}-\theta_{p-1})\geqslant\max_{1\leqslant r\leqslant t+1}(\theta_{2r}-\theta_{2r-2})\\&\geqslant\frac{1}{t+1}\sum_{r=1}^{t+1}(\theta_{2r}-\theta_{2r-2})=\frac{1}{t+1}(\theta_{2t+2}-\theta_0)\\&=\frac{1}{t+1},\end{aligned}$$

也就是最短的因子是 $\frac{1}{t+1}$, 比这个数更小的就无法保证, 显然, 均分法即

$$\theta_{p+1}-\theta_p=\frac{1}{2(t+1)}.$$

就可达到这一目的, 这就是 §2 所说的方法.

当然, 如果第一批试验不是按等分取点, 而是更细致些, 安排为

图 22

以后再按等分取点. 容易证明这是最好的安排, 其中

$$b=\frac{1}{2(t+1)^2-1},\quad a=\frac{2t+1}{2(t+1)^2-1},$$

满足

$$(a+b)t+a=\frac{2t+2}{2(t+1)^2-1}\cdot t+\frac{2t+1}{2(t+1)^2-1}=1.$$

以后余下

$$a:b \text{ 或 } b:a$$

把长为 a 的一段等分为 $(2t+1)$ 分, 即每段长为 b, 在分点上做试验, 以后均按 §2 的方法. 这样第一批试验后余下区间长为

$$l_1=a+b=\frac{2t+2}{2(t+1)^2-1}<\frac{2}{2t+1}$$

以后缩短的因子都是 $\frac{1}{t+1}$.

为了取点简便, 而精度又不相差太大, 我们建议采用 §6 介绍的方法.

再讨论每批做 $(2t-1)$ 个试验的情形,

这时, 可以证明 §6 给出的方法是最好的. 为此, 我们只需证明下面两个引理, 然后按照第一章 §5 的思考方法去论证.

记 $\Delta_k^{(2t-1)}$ 为 k 批试验后的精度, 我们有

引理 1 当 $k \geqslant 1$ 时, 恒有

$$\Delta_{k+1}^{(2t-1)} \leqslant \Delta_k^{(2t-1)} \leqslant t(\Delta_{k+1}^{2t-1} + \Delta_{k+2}^{2t-1}). \tag{1}$$

证 左边不等式是显然的, 故只证右方的不等式.

记 (x_0, x_{2t+1}) 是第 k 批试验余下区间之最大者, 即

$$x_{2t+1} - x_0 = \Delta_k^{(2t-1)}. \tag{2}$$

第 $(k+1)$ 批试验 $(2t-1)$ 个, 连上次留下的已试验点, 共有 $2t$ 个试验点, 记为 $x_1, x_2, \cdots, x_{2t}$,

且

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{2t} < x_{2t+1}.$$

我们有

$$x_{p+1} - x_{p-1} \leqslant \Delta_{k+1}^{(2t-1)} \quad (p = 1, 2, \cdots, 2t).$$

由 (2)

$$\begin{aligned}\Delta_k^{(2t-1)} = x_{2t+1} - x_0 &= \sum_{r=0}^{t-1}(x_{2r+2} - x_{2r}) + (x_{2t+1} - x_{2t}) \\ &\leqslant t\Delta_{k+1}^{(2t-1)} + (x_{2t+1} - x_{2t}).\end{aligned} \tag{3}$$

在区间 (x_{2t}, x_{2t+1}) 中, 第 $(k+2)$ 批试验点最多只能安排 $(2t-1)$ 个,

$$x_{2k+1} - x_{2t} \leqslant t\Delta_{k+2}^{(2t-1)}. \tag{4}$$

由 (3) 和 (4) 便得 (1) 式

引理 2 当 $k \geqslant 1, n \geqslant 1$ 时, 有

$$\Delta_n^{(2t-1)} \leqslant t\left(\frac{F_k^{(t)}}{t}\Delta_{n+k}^{(2t-1)} + F_{k-1}^{(t)}\Delta_{n+k+1}^{(2t-1)}\right). \tag{5}$$

其中 $\{F_k^{(t)}\}$ 由递归公式

$$F_0^{(t)} = 1, \quad F_1^{(t)} = t, \quad F_k^{(t)} = t(F_{k-1}^{(t)} + F_{k-2}^{(t)}) \tag{6}$$

给出.

由引理 1, 用归纳法易证.

对于 §6 给出的安排方法, 记 $l_k^{(2t-1)}$ 为第 k 批试验后留下的区间长度, 容易验证

$$l_k^{(2t-1)} = t(l_{k+1}^{2t-1} + l_{k+2}^{2t-1}), \quad k \geqslant 1. \tag{7}$$

$$l_n^{(2t-1)} = t\left(\frac{F_k^{(t)}}{t} l_{n+k}^{(2t-1)} + F_{k-1}^{(t)} l_{n+k+1}^{(2t-1)}\right) \quad (k \geqslant 1, n \geqslant 1). \tag{8}$$

根据 (1), (5), (7), (8), 用第一章 §5 的方法易证.

定理 对任一每批做 $(2t-1)$ 个试验的安排方法 $\mathscr{M}$, 记 Δ_k^{2t-1} 为第 k 批试验后的精度, 若 $\mathscr{M}$ 不同于 §2 的方法, 则一定有 $\mathscr{N}$, 使当 $K \geqslant \mathscr{N}$ 时,

$$\Delta_k^{(2t-1)} > l_k^{(2t-1)} = \frac{\theta^{k-1}}{t}.$$

即: §2 的方法是最优的安排方法.

依某种要求进行试验

每批同时做几个试验虽然有加快速度的好处, 但是也有增加试验费用的坏处, 并且每批试验个数增多, 原材料消耗比按正比增加得还要快. 例如, 用分数法 89/144 做十次试验的效果和一批同时做 143 个试验的效果相等, 时间缩短为 1/10, 但试验的代价却是 14.3 倍, 因此, 必须权衡利弊来决定采取何种方案. 此外, 一批做多个试验时, 试验范围缩小得很快, 例如, 每批做 7 个试验, 共做六批, 精度为 2/19776, 即为万分之一. 如上所述, 两个试验点愈靠近, 则通过试验来分辨它们也就愈困难, 因此考虑批数做得很多, 意义不大. 遇到这种情况, 首先看看试验区间要求分得多么细, 再决定一批做几个试验, 共做几批, 来安排试验点等等.

例如, 有八套仪器, 可以同时做试验, 但在试验点比较接近时, 要求重复试验来避免误差, 简单地说, 我们希望这样安排: 进行四批试验第一批八个试验点在八个不同的地方做, 第二批四个试验点在四个不同的地方各做两个试验, 第三批两个试验点在两个不同的地方各做四个试验, 第四批在一点做六个试验, 并在留下的较好点补做二个试验加以比较. 也就是说每批试验次数依次为 $(8, 4, 2, 1)$.

如果按 §5 的理论上推导, 容易写出

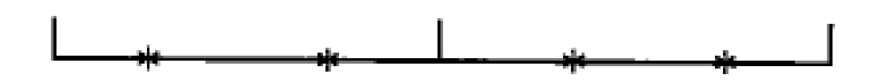
$$\begin{cases} 1 = a_0 = 5a_1 + 4a_4 \\ a_1 = 3a_2 + 2a_4 \\ a_2 = 2a_3 + a_4 \\ a_3 = a_4 + a_5 \\ a_4 = a_5 \end{cases}$$

并算出误差 $a_5 = 1/89$. 但是, 这样就要求第一批试验点两两相距 1/89, 与我们的前提 "试验点比较接近时, 要求重复试验来避免误差" 不相符合了. 我们可以用下面的安排方法:

1) 先分试验范围为九等分, 在 5 点上做八个试验 (试验点相距 1/9)

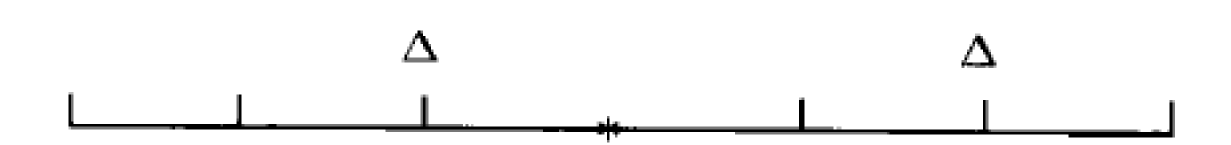


2) 对余下的区间仍按等分 (试验点相距 1/27)



每个打 * 处各做二个试验.

3) 对余下的区间分成六等分, 在第 2,5 分点各做四个试验:



4) 最后在余下的一点做试验.

这样安排, 误差是 $1/9 \times 1/3 \times 1/3 = 1/81$, 与前面安排的误差 1/89 相差并不大, 但却能有效地避免了两点相距很近不易分辨试验结果的困难.

重复性试验的分辨问题

我们在上一节说过, 有时需要用重复试验来避免误差, 由于在一个点 $x = a$, 通过试验所得出的 $f(x)$ 的数据, 并不一定是 $f(a)$, 而是可能有误差的, 例如测得的 $y = f(a) + \xi$, ξ 就是误差, 为避免误差的严重影响, 我们往往在同一条件 $x = a$ 的情况下, 多做些试验, 得出以下的数据

$$y_1, y_2, \cdots, y_s,$$

在另一点 $x = b$, 也做了些试验, 各得出

$$y'_1, y'_2, \cdots, y'_t.$$

如果 y_i 都比 y'_j 大, 则两个试验是可以分辨的, 也就是可以指望 $f(a) > f(b)$. 但是, 有些 y_i 比有些 y'_j 大, 而有些 y_i 比有些 y'_j 小, 怎么办?

第一个建议是用平均数法, 如前, 在 $x = a$ 时所测出的数据的平均数

$$\bar{y} = \frac{1}{s}(y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_s)$$

比

$$\bar{y}' = \frac{1}{t}(y'_1 + y'_2 + \cdots + y'_t)$$

大, 就认为 $f(a)$ 比 $f(b)$ 大,

第二个建议, 看是否是

$$\begin{aligned}&\bar{y} > 每一个 y'_j \quad (j=1,2,\cdots,t),\\&\bar{y}' < 每一个 y_i \quad (i=1,2,\cdots,t).\end{aligned} \tag{1}$$

如果是这样, 我们认为 $f(a)>f(b)$ 的把握更大了.

第三个建议: 考虑不适合不等式 (1) 的个数如果 y'_j, y_i 中有 p 个不适合 (1), 则我们可以用

$$1-\frac{p}{s+t}$$

来检定 $f(a)>f(b)$.

第四个建议: (y_i, y'_j) 共有 st 对, 其中适合于

$$y_i > y'_j$$

的有 q 对, 则 $f(a)>f(b)$ 的把握是

$$\frac{q}{st}.$$

例如在两点各做了四个试验, 得出数据

$$\begin{aligned}&y_1=1.19, \quad y_2=1.21, \quad y_3=1.21, \quad y_4=1.22,\\&y'_1=1.10, \quad y'_2=1.15, \quad y'_3=1.18, \quad y'_4=1.20,\end{aligned}$$

我们只要依大小排队

$$y'_1<y'_2<y'_3<y_1<y'_4<y_2=y_3<y_4,$$

y_i 与 y'_i 共有 $4\times 4=16$ 种关系, 15 个都适合 $y'_j<y_i$, 只有一个 $y_1<y'_4$, 因此 $f(a)>f(b)$ 的可靠性是 $15/16=0.9375$.

上述这些处理方法, 是比较简便而又避免了不必要的繁琐的处理方法, 是比较容易掌握的. 但在同一点反复做试验得到数据很多的时候, 我们不排斥运用 "正态分布" (如果数据大致服从此规律时) 中的标准离差等方法来判断最优点出现的可能性的范围.

还有一点值得注意, $f(a)$ 接近于 $f(b)$. 难以分辨时, 即使就是 $f(a)=f(b)$ 时 (或差不多相等), $f(x)$ 的最大值在 (a,b) 之间的可能性也是很大的, 换言之, a 之左, b 之右都可以舍弃. 因而建议, 暂且不管 (a,b) 之外, 只对 (a,b) 开始用黄金分割法或其他方法, 这样可以省做不少试验.

非单峰的情况如何办

有人会问, 前面所讲的只适合于 “单峰” 的情况, 多峰 (即有几个点, 其附近都比它差) 的情况怎么办? 我们建议:

1. 先不管它是单峰还是多峰, 就按单峰的方法去做. 找到一个 “峰” 后, 如果符合要求, 就先照它生产, 然后有时间继续再寻找其它可能的更高的 “峰”(即分区寻找).

2. 先做一批分布得比较均匀疏属的试验, 看其是否有 “多峰” 的现象出现, 如果有, 则分区寻找. 这时, 第一批试验的点最好依以下的比例划分

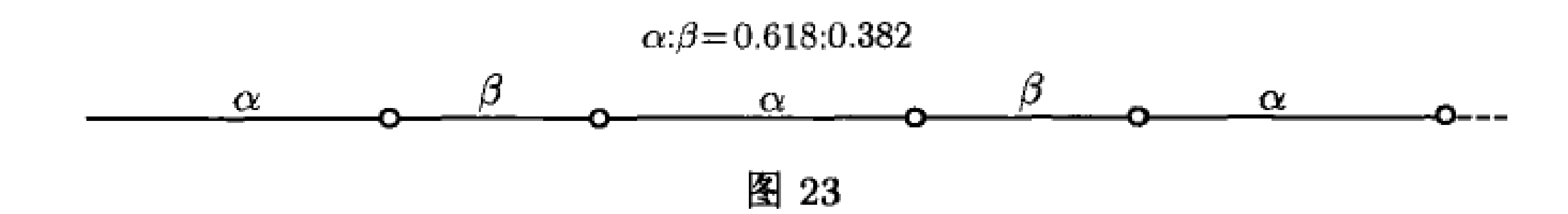


图 23

例如, 三个分点, 可以取之如

α β α β

图 24

使留下的成为

α β 或 β α

图 25

的形式, 接下去便可用 0.618 法了.

最后要说明一下, 有些问题, 并不是寻找单峰函数的最大值, 而是如对分法那样, 寻找一个合适的点. 在区间 (a,b) 中有一个单调增加函数 $f(x)$, 还有一个数 c,

$$f(a) < c < f(b).$$

要寻找 x_0 使

$$f(x_0) = c.$$

我们知道, 对分法是在区间的中点做试验, 若 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > c$, 则舍弃 $\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$; 若 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < c$, 则舍弃 $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$, 再在余下区间的中点做试验, 如此继续做几次试验后, 余下区间的长度是

$$\frac{1}{2^n}(b-a).$$

容易证明, 对于全体单峰函数来说, 这个办法是最好的. 如果条件允许每批做几个试验, 那又如何安排呢? 很简单, 不管 m 是奇数还是偶数, 这时都是用均分法最好, 例如每批做三个实验, 就把 (a, b) 四等分,

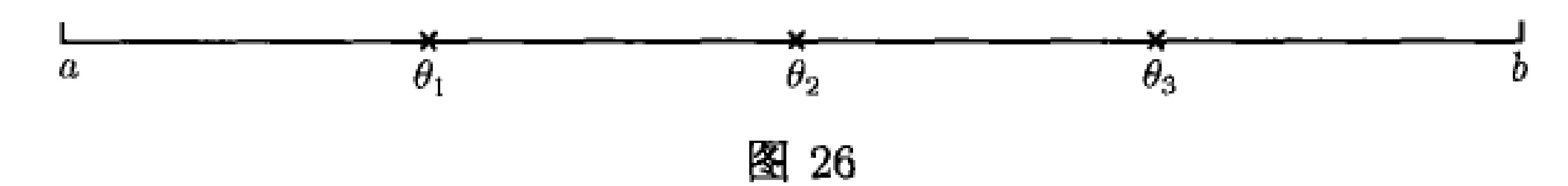


图 26

在三个分点 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 处做, 然后再考察试验的结果, 例如 $f(\theta_2) < c, f(\theta_3) > c$, 则舍弃 (a, θ_2) 和 (θ_3, b), 再四等分 (θ_2, θ_3), 在分点做第二批试验, 如此继续做 n 批试验, 余下的含有 x_0 的区间长度是

$$\frac{1}{4^n}(b-a).$$

也容易证明这个安排方法是最好的.



优选学

第二部分 多因素优选法

这一部分考虑的是多因素优先法, 我们将分章研究这些方法在多因素情况下的推广. 和前面一样, 每章都有一段方法的述要, 在明确了方法的使用以后, 再逐步深入研究方法的收敛性和一些有关的数学问题, 最后一章是讨论优选法与计算数学的关系. 所介绍的优选法, 实质上就是求最大值 (或最小值) 的快速计算法. 不仅如此, 很多计算问题都可以化为极值问题来解决, 而极值问题离散化后, 就与优选法有关. 因而优选法在计算数学上也是很重要的.

双因素优选法

述　要

绝大部分的双因素优选法都可以推广到两个以上因素的情况, 只是所需的工作量, 将随着因素个数的增加而迅速增长. 下面我们先讲方法:

1) 网格法　把因素 x 和 y 的优选范围 (区域)

$$a < x < b, \quad c < y < d$$

各分为 l 和 m 个等分, 于是总共有 lm 个格子, 在每个格子中做一个试验, 共做 lm 个试验后, 哪个好用哪个. 这个办法很简单, 但它的工作量比起一个因素来说, 是大大增加了. 例如 $l=10, m=10$, 就要做 100 个试验.

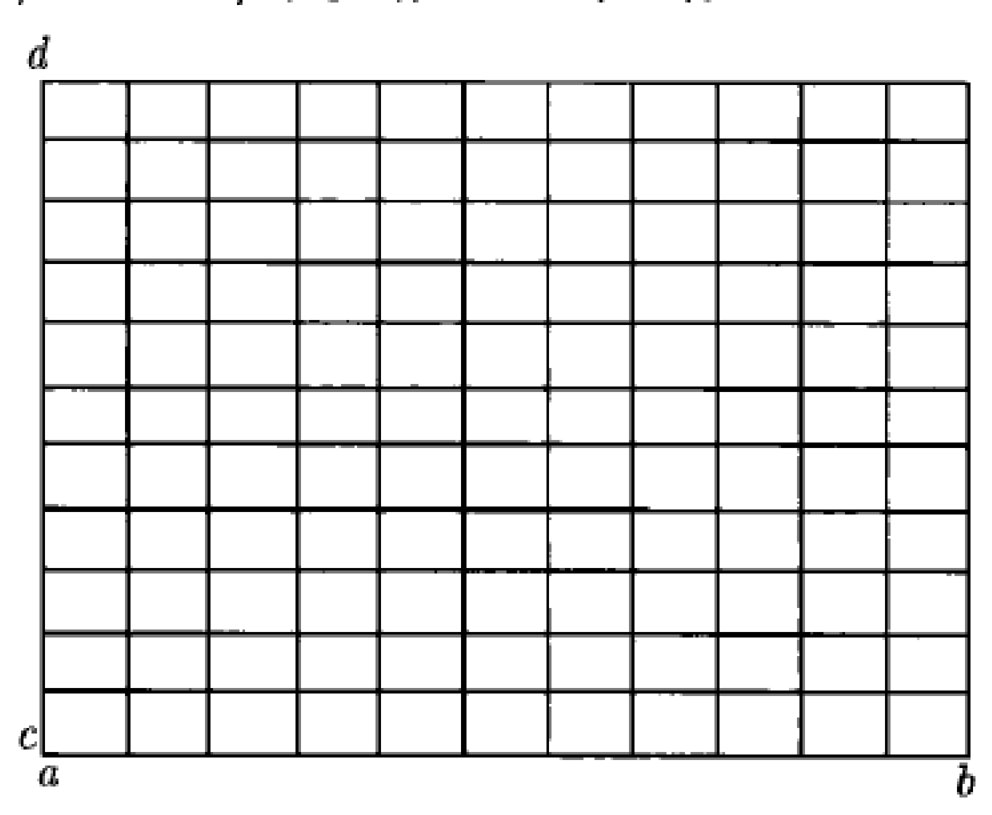


图 27

假定处理的是单峰问题, 也就是把 x, y 平面作为水平面, 试验出来的数值 z 看成为这一点的高度. 这样的图形就像一座高山, 我们假定这一片地区只有一个制高点, 在平面上画出等高线后, 这些等高线形成一圈圈的互不相交的封闭曲线. 我们还假定, 每一圈都是凸的, 就和树木的年轮一样.

2) 对开法　裁一块方格纸代表优选范围

$$a < x < b, \quad c < y < d.$$

左右对折起来, 在中线

$$x = \frac{1}{2}(a+b)$$

上, 用单因素法找最大值, 设在 P 点取这最大值. 再上下对折, 在中线

$$y = \frac{1}{2}(c+d)$$

上, 用单因素法找最大值, 假定在 Q 点取这值.

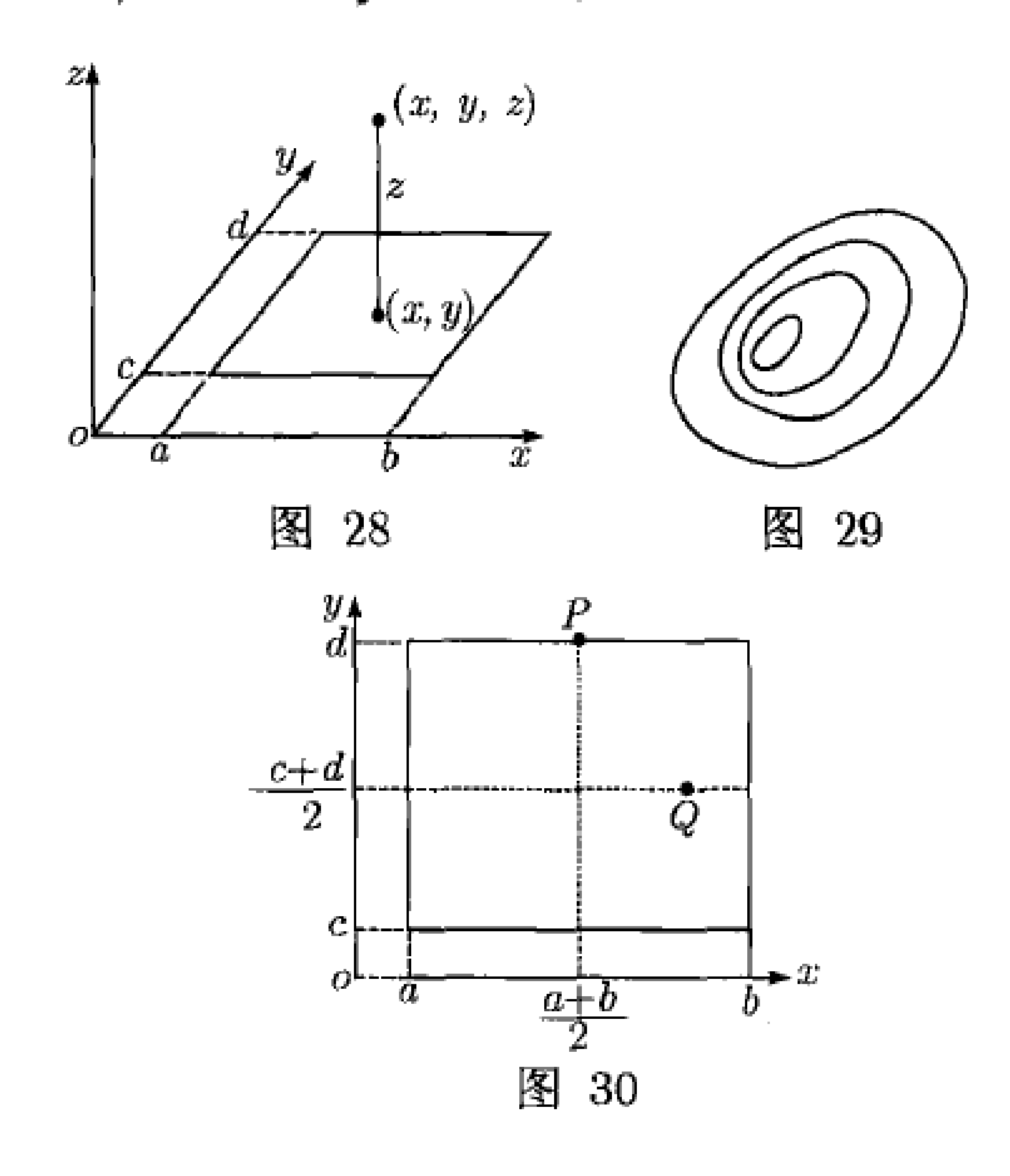


图 28　图 29

图 30

比较 P 点和 Q 点的结果, 如果 Q 大, 裁掉纸的左半张 (不然裁掉下半张). 再用同样的方法来处理余下的半张纸, 不断地去其一半, 逐步地得出所需要的结果.

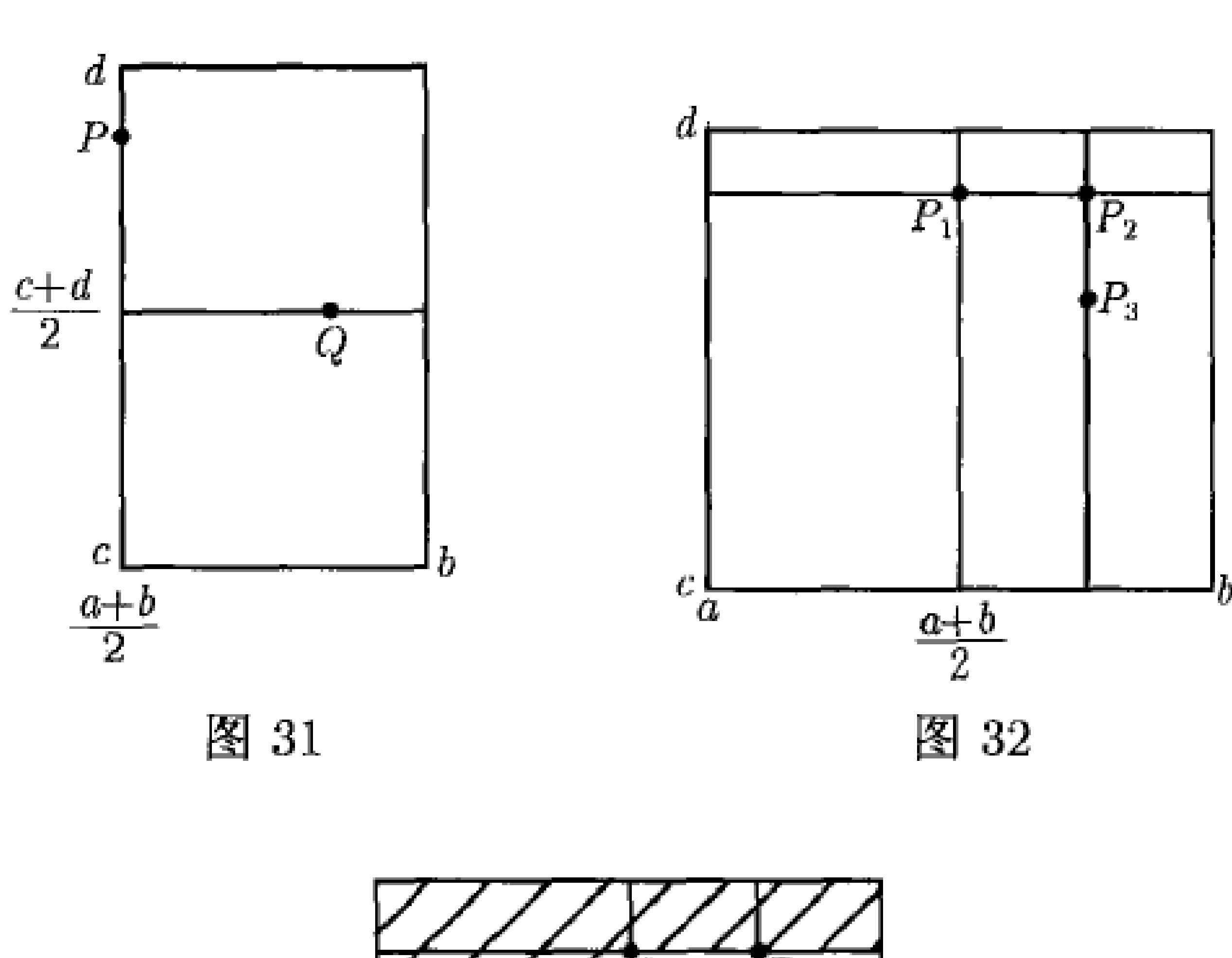


图 31　图 32

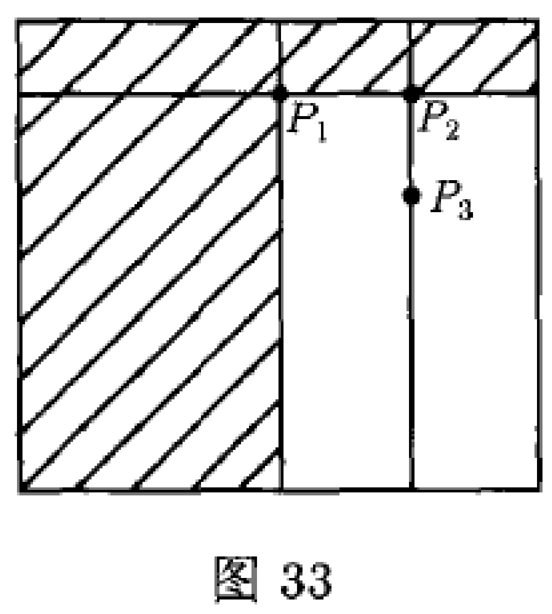


图 33

3) 旋升法　先在一条中线 (例如左右对折线) 上求最大值, 假定在 P_1 点取这最大值. 通过 P_1 作水平线, 在这水平线上找最大值. 假定在 P_2 处取, 又在通过 P_2 的垂线上找最大值, 而在 P_3 取这最大值, 等等. 继续做下去, 有荫影的部分以后不要再考虑了.

4) 平行线法　两个因素中, 一个例如 x 易于调整, 另一个例如 y 不易调整, 则建议用"平行线法", 先把 y 固定在范围 (c,d) 的 0.618 处, 即取

$$y = c + (d-c)0.618,$$

用单因素法找最大值, 假定在 P 点取这值, 再把 y 固定在范围 (c,d) 的 0.382 处, 即取

$$y = c + (d-c)0.382,$$

用单因素法找最大值, 假定在 Q 点取这值, 比较 P, Q 的结果, 如果 P 大, 则去掉下面部分, 即去掉

$$y \leqslant c + (d-c)0.382$$

的部分 (否则去掉上面的部分), 再用同样方法处理余下的部分, 如此继续. 这个方法也适用于分批试验的情况.

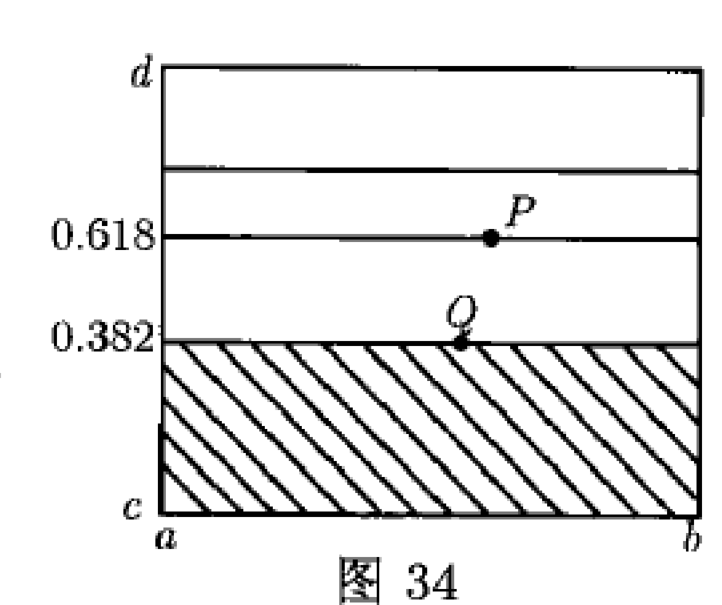
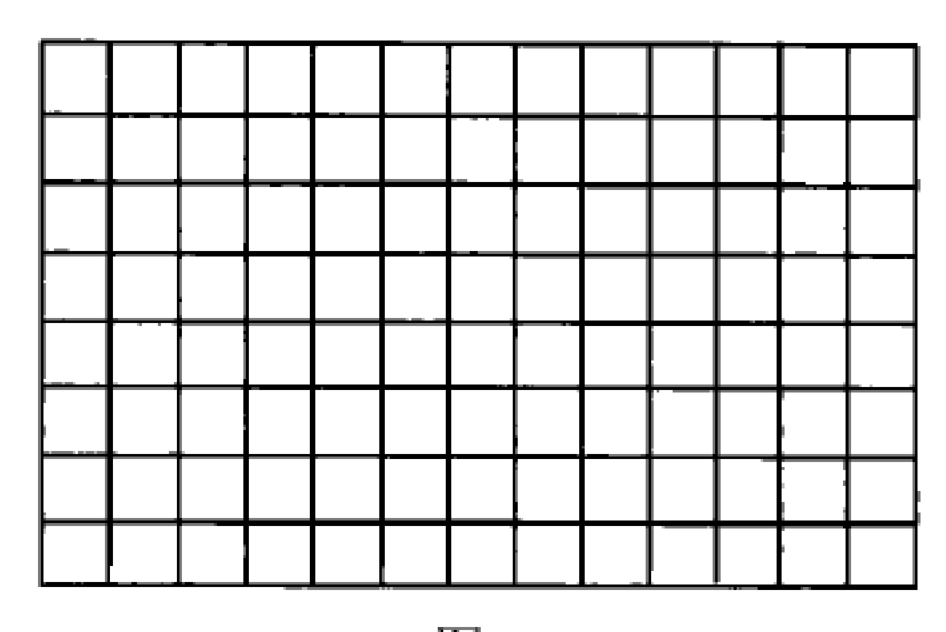


图 34

5) 按格上升法　把所考虑的区域打上格子, 与 2), 3), 4) 类似, 但用分数法来代替黄金分割法.

6) 翻筋斗法　从一个等边三角形 ABC 出发 (如图 36), 在顶点各做一个试验, 如果在 C 点所做的试验最好, 则作 C 点的对顶同样大的等边三角形 CDE. 在 D, E 处做试验, 如果 D 点最好, 则再作 D 点的对顶同样大的等边三角形,$\cdots$, 一直做下去. 如果在 F, G 处做试验, 都没有 D 点好, 则取 FD 及 CD 的中点 F', G' 做试验, 也可以取 CD 及 ED 的中点做试验, 再用以上的方法. 如果在 D 的两边一分再分都没有 D 点好, 一般说来, D 就是最好点了.


图 35

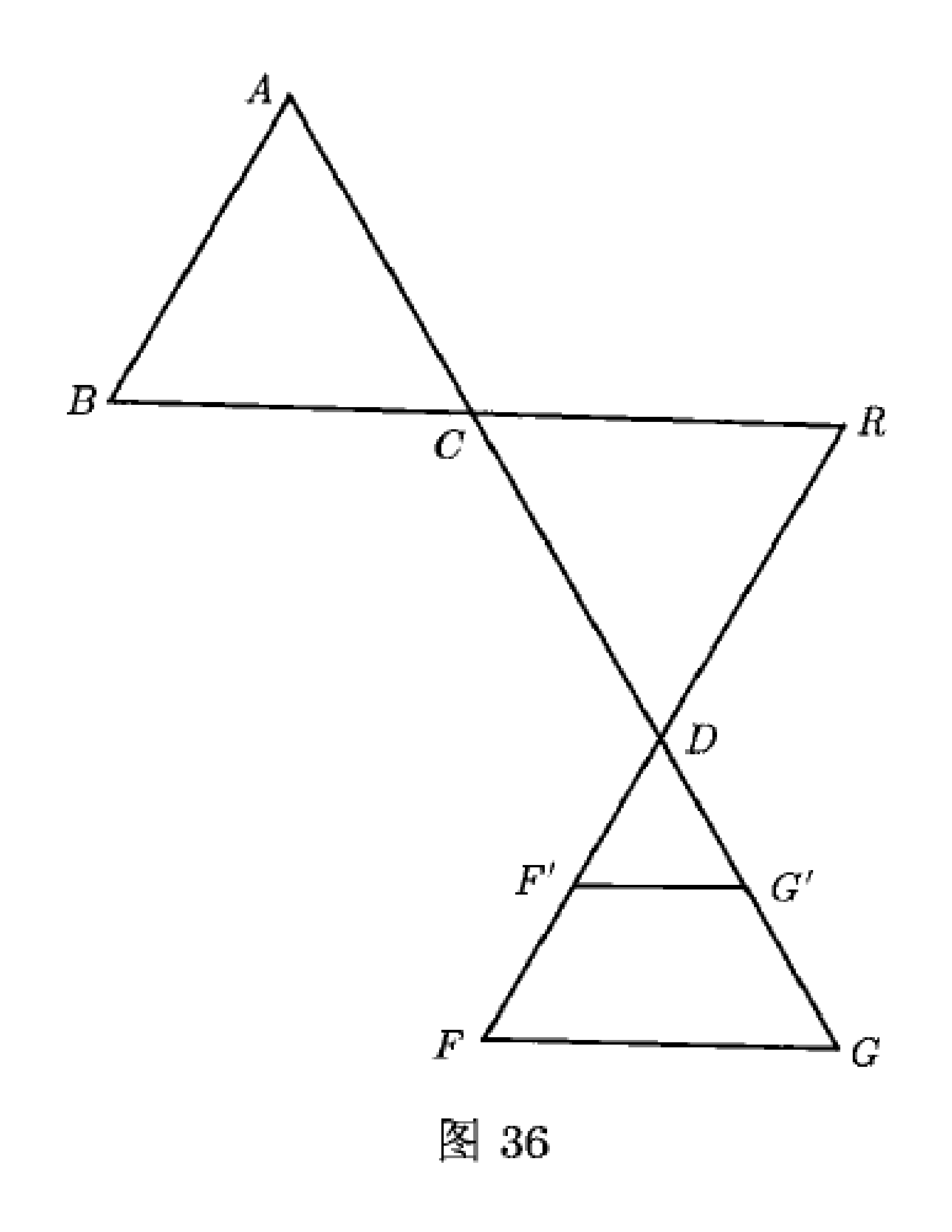


图 36

对　开　法

实际上, 我们的优选问题就是在区域

$$a < x < b, \quad c < y < d$$

内求 $z = f(x,y)$ 的最大值. 所谓等高线, 就是固定 z, 由方程 $z = f(x,y)$ 在 (x,y) 平面上所定义的曲线. 我们假定等高线有连续切线.

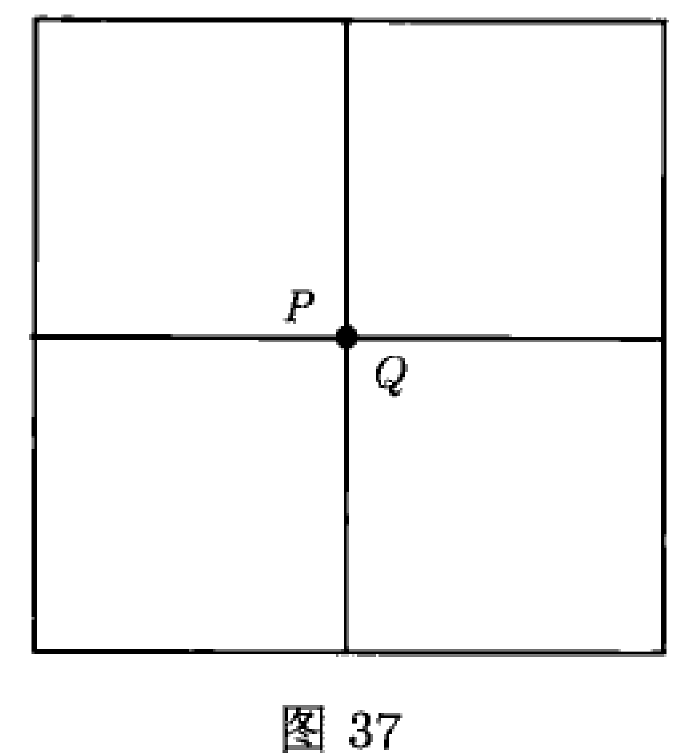


图 37

在 (x,y) 平面上, 一条直线上取最大值 e 的点, 一定是等高线 $f(x,y) = e$ 与这直线的切点, 因为这直线不可能与它再交于另一点. 由于等高线是凸的, 所以, 使 $z > e$ 的点一定分布在这直线的一侧, 现在用这个原理来观察对开法.

(1) 这方法一定可以逐步通过最大值 (或简称收敛法).

我们看到, 应用这个方法做了第二批试验后, 每做一批, 区域的面积减少一半,

因此收敛性是没有问题的, 但有一个特殊情况要注意, 就是会不会出现 P 点和 Q 点恰巧都是中点的情况, 即横线纵线上的值都没有中心点的值大, 这说明如果等高线

$$f(x,y) = d$$

不缩成一点 (制高点), 则等高线在这点不存在切线, 或者说切线在这点不连续.

(2) 有效性

如果单因素是用黄金分割法进行的, 假定 x, y 所要求的精密度各为 ε 及 η, 经适当的放大缩小, 不妨假定 $\varepsilon = \eta$. 在第一条线上作 l 次试验后, 所达到的精度密是

$$(b-a)w^{l-1}, \quad w = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}),$$

现在所要求的是

$$(b-a)w^{l-2} > \varepsilon \geqslant (b-a)w^{l-1},$$

即

$$\left(\frac{1}{w}\right)^{l-1} \geqslant \frac{b-a}{\varepsilon} > \left(\frac{1}{w}\right)^{l-2},$$

$$l-1 \geqslant \frac{\log \dfrac{b-a}{\varepsilon}}{\log \dfrac{1}{w}} > l-2,$$

也就是 l 差不多等于

$$\log \frac{b-a}{\varepsilon} \bigg/ \log \frac{1}{w} \sim \log \frac{1}{\varepsilon} \bigg/ \log \frac{1}{w}.$$

以后每做一批, 区域面积去掉 1/2, 经 p 次单变量处理后, 得出的面积是原来的

$$\frac{1}{2^{p-1}}.$$

如果做到

$$\frac{(b-a)(d-c)}{2^{p-1}} \leqslant \varepsilon^2 < \frac{(b-a)(d-c)}{2^{p-2}},$$

当然就满足要求了, 也就是 p 大致等于

$$\frac{2\log \dfrac{1}{\varepsilon}}{\log 2}.$$

因此,

$$2\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^2 \bigg/ \left(\log \frac{1}{w} \cdot \log 2\right)$$

次试验可达目的, 也就是当 ε 很小时, 无穷大的阶是

$$\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^2,$$

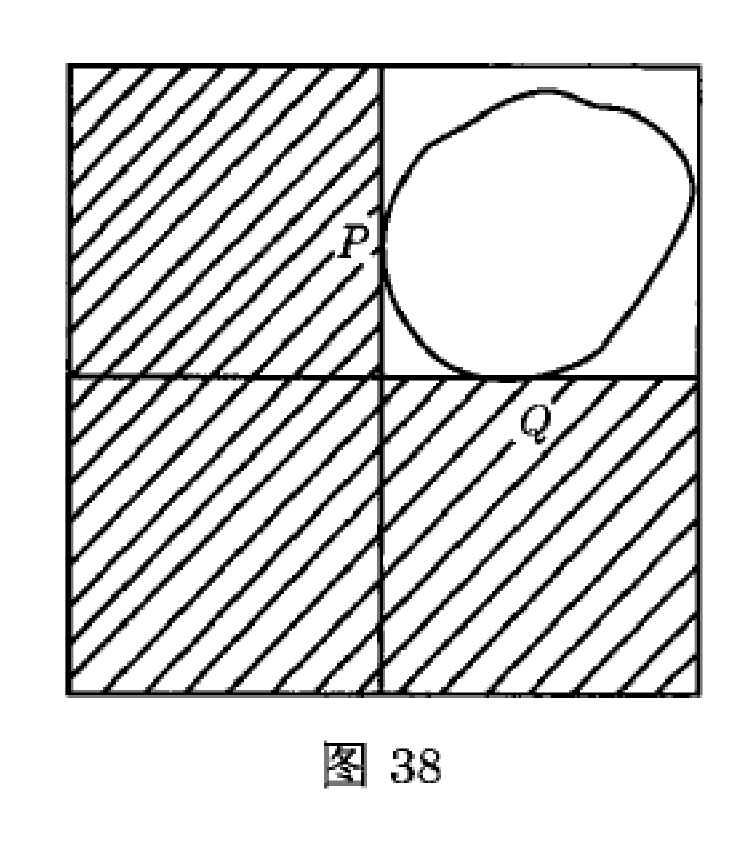


图 38

比起网格法 $\frac{1}{\varepsilon^2}$, 要好得多.

附记 在 P, Q 二点做出来的试验数据如果相等 (或无法辨认好坏), 这是件好事, 因为这说明 P 点和 Q 点位于同一条等高线上了 (见图 38), 所以可以把图上的下半块和左半块都去掉, 仅留下第一象限. 这一点对统计方法来说也是十分有利的, 当两点试验数据的可分辨性十分接近时, 我们干脆丢掉面积的 3/4.

旋 升 法

在进行旋升法的时候, 请注意: 划掉一个区域的原则, 也就是有了 P_1 点与 P_2 点之后, 划掉通过 P_1 点的直线所分开的不包含 P_2 点的部分, 这样可以少做不少试验, 当然, z 值不断上升的情况可能是外向的, 也可能是内向的, 也可能兼而有之 (图 40).

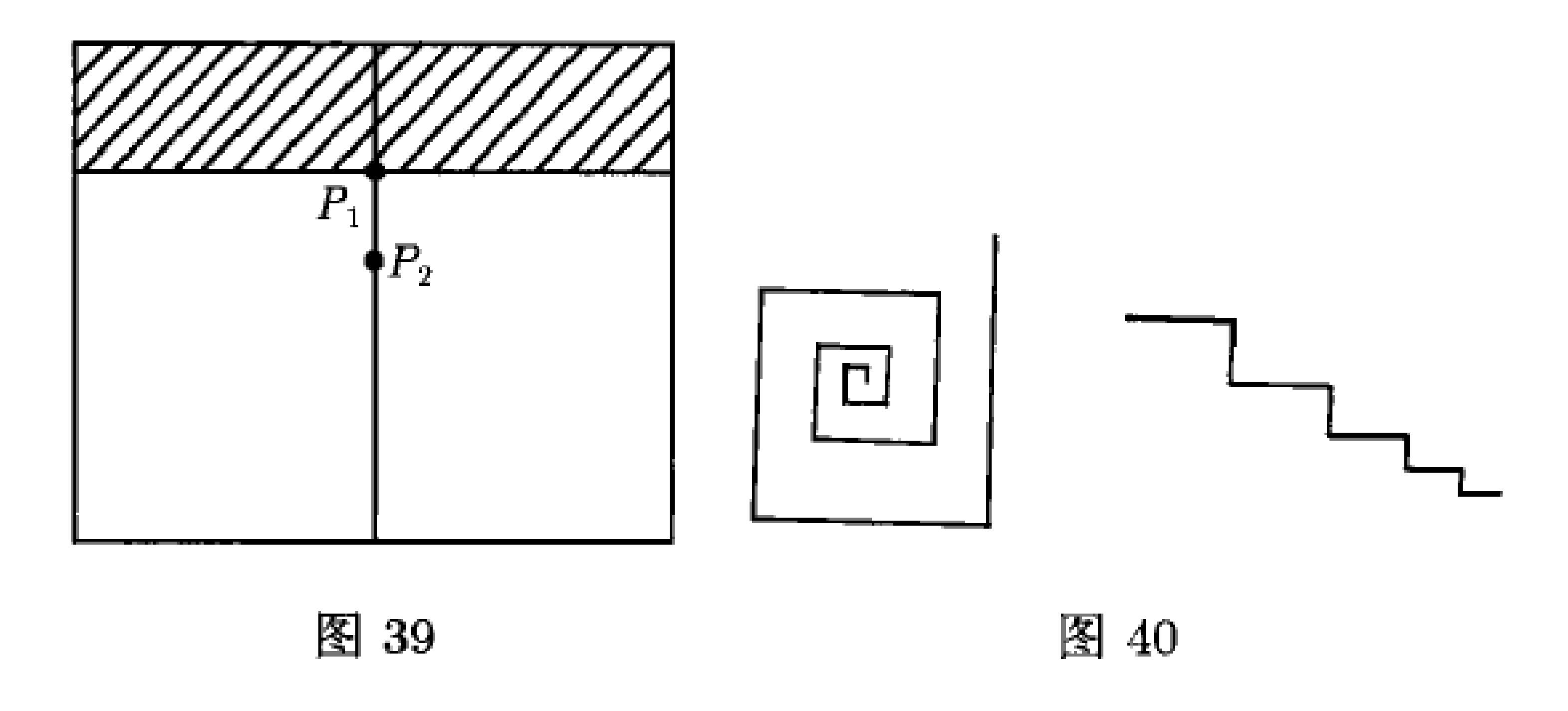


图 39 图 40

从方法来看, 每次求最大值, 可能比对开法好些, 但并不能保证每次划去的部分大于或等于原来面积的一半. 也就是说, 上算的可能性虽然很大, 但不上算的可能性也是不能排除的, 不象对开法稳拿一半.

(1) 收敛法

如果一直做下去, 则

$$z_1 = f(p_1) < z_2 = f(p_2) < \cdots < z_n = f(p_n) < \cdots$$

是一个单调上升的数列, 而由问题性质看出这数列是有界的, 因此

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 (z_n \leqslant z_0).$$

我们画下高度等于

$$z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots$$

的等高线 $c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$. 如果 $z = z_0$ 不是制高点的高程, 则有一条等高线 c_0, 其高程是 z_0. 当 n 充分大时, c_n 在 p_n 的法线将穿入 c_0 之内, 换言之, z_{n+1} 比 z_0 更大, 这是矛盾. p_l 在 c_{l-1} 之中, 所以 p_l 趋于制高点.

(2) 有效性

要使误差小于 $\varepsilon(>0)$, 需要的试验次数的数量级是

$$\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^2$$

证明请看下一章的 §1.

平 行 线 法

从对开法的讨论中立刻明白平行线法一定逐步逼近最大值. 如果单因素是用黄金分割法, 则每条直线上要试验的次数大约是

$$\log\frac{1}{\varepsilon}\Big/\log\frac{1}{w}\left(w=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right),$$

而每做一条线上的试验后, 区域面积缩小为原来的 w, 这样 p 次后, 留下的面积是原来的

$$w^{p-1}.$$

当要求 x 和 y 都达到 ε 的精度, p 的阶数约为

$$\log\frac{1}{\varepsilon}\Big/\log\frac{1}{w},$$

因此一共要做的试验次数约为

$$\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^2\Big/\left(\log\frac{1}{w}\right)^2.$$

同样可以讨论分批试验的情况.

两个因素的离散情形

例如优选的范围是一个 21×13 的格子, 我们现在不用对开法, 因为平分下来不一定在格子点上, 也不一定上算, 怎么办呢? 我们在 $x=13$ 的直线上用分数法做

五次试验. 又在 $y=8$ 的直线上也用分数法, 这时 T 点已做过试验, 因此做 $6-1$ 次试验. 各得一最优点, 记之为 P 点, Q 点. 比较 P 点与 Q 点, 如果 Q 点比 P 点好, 则裁取一个 8×13 的格子 (图 42).

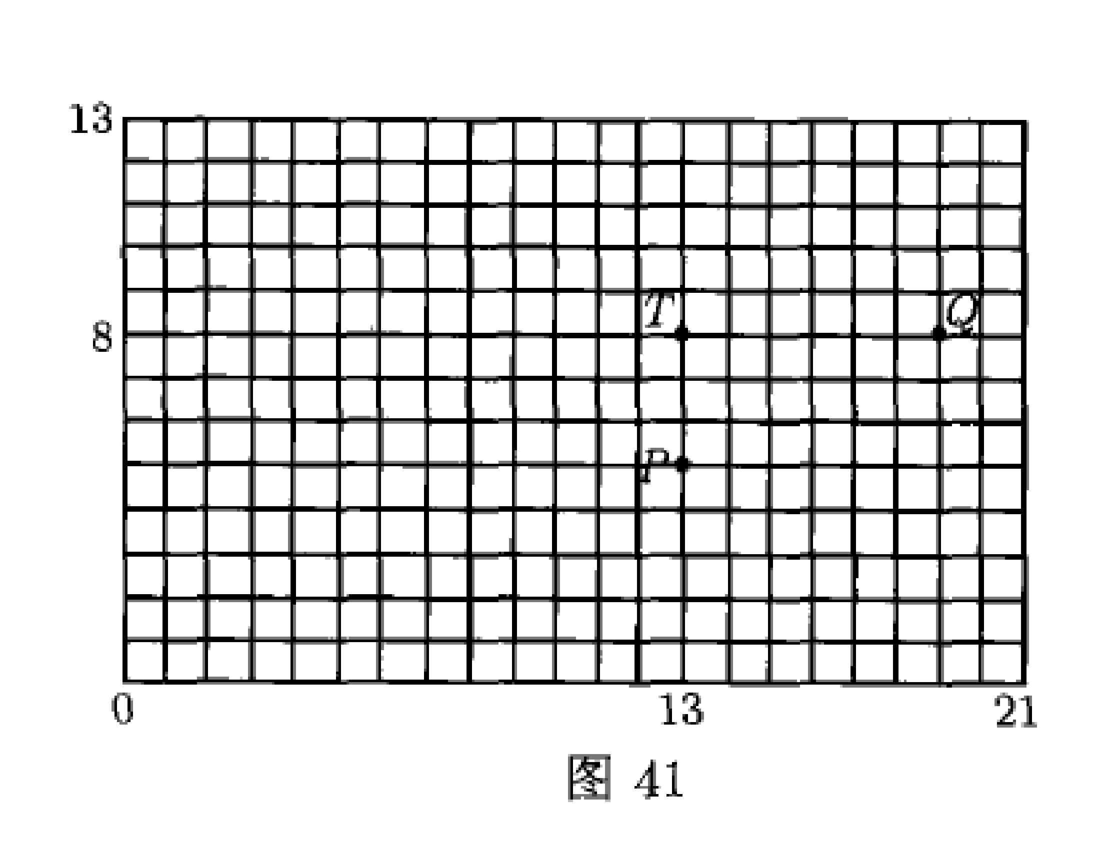


图 41

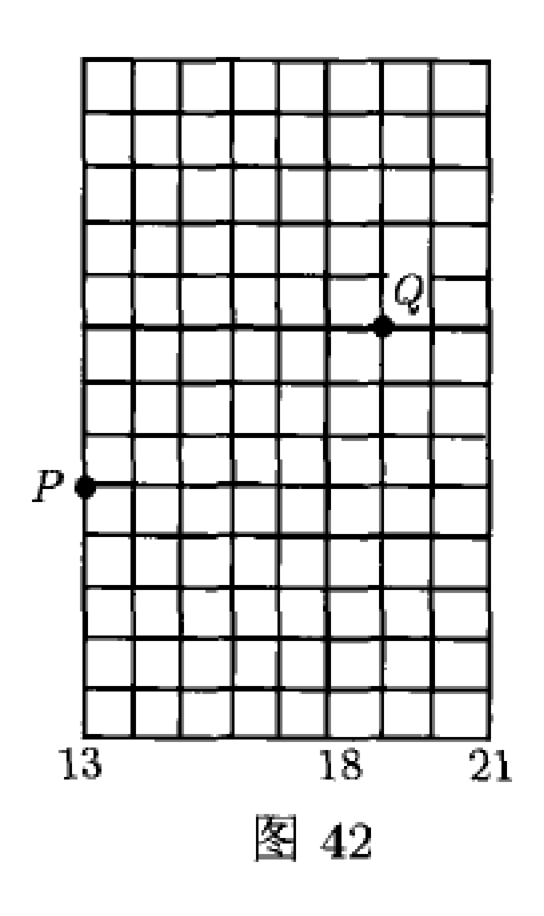


图 42

在这个图形中, 取 $x=13+5=18$ 还是取 $x=21-5=16$, 可以这样来考虑: 因为 $x=18$ 更靠近 Q 点些, 因而取 $x=18$, 再在这条线上用分数法. 这样做并不能排除不上算的可能, 但上算的可能性大些 (因为近“大”处得“更大”).

如果在每个格子点上作试验, 共需试验 $20\times 12=240$ 次, 用现在的方法, 最多只要 30 次就可以了, 如果纵横格子个数并不恰巧等于某一 F_n, 那末可以添上一些或冒点风险减少一些, 以凑成 F_n. 例如在

$$0<x<18$$

时, 不妨添上些成 $0<x<21$, 或减掉些, 而成

$$0<x<13.$$

当然也可以用平行线法, 读者自行补充.

翻筋斗法

当因素的变化不能跳跃式调整时, 此方法有其优点, 翻筋斗法的理论根据是: 通过一点的两个方向的微分都等于零, 一般来说, 这点就是极值点.

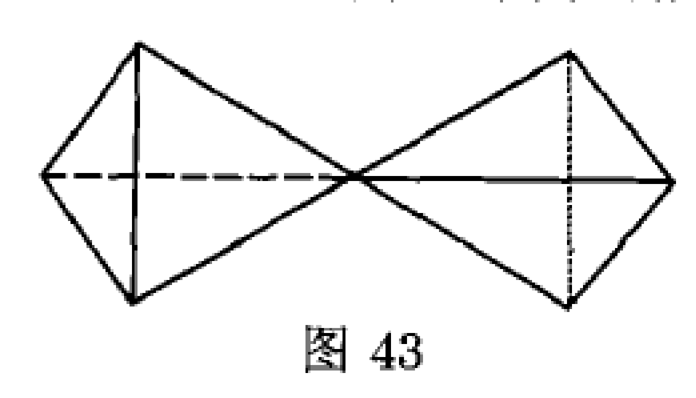


图 43

其实前面关于等边三角形的限制不是必需的, 根据具体情况用直角三角形, 任意三角形都行. 如果用四边形, 五边形,$\cdots$ 来翻筋斗效果如何呢? 例如, 有人建议用矩表, 在矩形的四个顶点做试验, 然后依最好点翻过去, 在新的三个顶点做试验, 等等, 称为“矩形调优

法”. 这样做好不好? 这样既多做了试验, 又没有很好的理论根据. 因为这里同时考虑了三个方向, 而极值问题一般只要考虑两个方向就够了. 因此“矩形调优”就不知用三角形翻筋斗. 翻筋斗法不难推广到多个因素的情形, 例如: 三个因素, 用正四面体在四个顶点做试验, 如图所示, 依最好的一点翻过去, 等等.

关于 n 个因素则是找出一个 n 维的正单纯形, 在它的 $n+1$ 个顶点做试验, 怎样找顶点? 我们建议用以下的方法:

设 A 点的坐标是 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, 以 A 为顶点边长为 h 的 n 个顶点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的坐标可用下法得之, 先做 B 点:

$$b_1 = a_1 + ah, \quad b_2 = a_2 + ah, \cdots, \quad b_n = a_n + ah,$$

这儿

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{n+1} - 1}{n},$$

也就是每一坐标上都加上 ah, A_1 就是 B 的第一个坐标加上 $\frac{h}{\sqrt{2}}$, A_2 就是 B 的第二个坐标加上 $\frac{h}{\sqrt{2}}, \cdots$, A_n 就是 B 的第 n 个坐标加上 $\frac{h}{\sqrt{2}}$, 其余坐标不变. 证明是不难的, A 与 A_i 的距离平方等于:

$$\begin{aligned}
&(n-1)(ah)^2 + \left(ah + \frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2 \\
=& \left[(n-1)a^2 + a^2 + \sqrt{2}a + \frac{1}{2}\right]^{h^2} \\
=& \left(na^2 + \sqrt{2}a + \frac{1}{2}\right) h^2 \\
=& \frac{1}{2}\left[\frac{(\sqrt{n+1+1} - 1)^2}{n} + 2\frac{\sqrt{n+1} - 1}{n} + 1\right] h^2 \\
=& h^2,
\end{aligned}$$

所以 A 与 A_i 的距离等于 h.

又 A_i 与 $A_i (j \neq i)$ 的距离等于

$$\sqrt{2\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2} = h.$$

另一方法: 假定 A 是原点, $h = 1$(都不失其普遍性), 取

$$A_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0),$$

$$A_2=(\beta_1,a_2,0,\cdots,0),$$

由于 A_2 与 A 的距离等于 1, A_1 与 A_2 的距离也等于 1, 所以

$$\beta_1^2+a_2^2=1,\quad (\beta_1-1)^2+a_2^2=1.$$

得 $\beta_1=\frac{1}{2}$, $a_2=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ 取正号得

$$A_2=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0,\cdots,0\right).$$

我们可以一维一维地添加, 一般有

$$A_l=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{l-1},a_l,0,\cdots,0),$$

这儿

$$\beta_{l-1}=\frac{1}{2l(l+1)},\quad al=\frac{l+1}{2l}.$$

证明: A 与 A_l 的距离平方等于

$$\begin{aligned}&\beta_1^2+\beta_2^2+\cdots+\beta_{l-1}^2+a_l^2\\=&\sum_{p=1}^{l-1}\frac{1}{2p(p+1)}+\frac{l+1}{2l}\\=&\sum_{p=1}^{l-1}\left(\frac{1}{2p}-\frac{1}{2(p+1)}\right)+\frac{l+1}{2l}\\=&\frac{1}{2}-\frac{1}{2l}+\frac{l+1}{2l}=1.\end{aligned}$$

又 A_l 与 $A_m(l>m)$ 的距离平方等于

$$\begin{aligned}&(a_m-\beta_m)^2+\beta_{m+1}^2+\cdots+\beta_{l-1}^2+a_l^2\\=&\left(\sqrt{\frac{m+1}{2m}}-\sqrt{\frac{1}{2m(m+1)}}\right)^2\\&+\sum_{p=m+1}^{l-1}\frac{1}{2p(p+1)}+\frac{l+1}{2l}\\=&\frac{m}{2(m+1)}+\sum_{p=m+1}^{l-1}\left(\frac{1}{2p}-\frac{1}{2(p+1)}\right)+\frac{l+1}{2l}\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(m+1)}+\sum_{p=m+1}^{l-1}\left(\frac{1}{2p}-\frac{1}{2(p+1)}\right)$$
$$+\frac{1}{2l}+\frac{1}{2}=1.$$

即得所证,

新的试验点是很容易求出的：在 $(n+1)$ 个顶点 $P_1, P_2, \cdots, P_{n+1}$ 上做试验, 其中

$$P_i=(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_n})(i=1,2,\cdots,n+1).$$

假设 P_i 上的试验结果最好, 依 P_j 找出各顶点的对称点

$$P_i'(i=1,2,\cdots,n+1):$$

$$P_i'-P_j=P_j-P_i,$$

即

$$P_i'=2P_j-P_i, \quad (i=1,2,\cdots,n+1).$$

然后在新的顶点做试验, 找出最好的一点, 又依这点找对称点, 一直做下去, 如果做不下去了, 比如 P_j 仍是最好点, 这时将距离缩小, 例如缩小一半：

$$P_i''-P_j'=\frac{1}{2}(P_i'-P_j')$$

即

$$P_i''=\frac{1}{2}(P_i'+P_j')$$

在 $P_1'', P_2'', \cdots, P_{n+1}''$ 继续做试验.

最陡上升法

述 要

先在 $(n+1)$ 个点 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $(x_1+\delta_1,x_2\cdots,x_n)$, $\cdots(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n+\delta_n)$ 上各做一次试验, 得出数据

$$z_1, z_1^{(1)}, \cdots, z_1^{(n)},$$

在线段

$$x_1+\frac{z_1^{(1)}-z_1}{\delta_1}t, \cdots, x_n+\frac{z_1^n-z_1}{\delta_n}t$$

上用单变数方法找出 z 的最大值, 这儿 t 的变化范围由以下的不等式决定

(i) $$t \geqslant 0,$$

(ii) $$a_i \leqslant x_i+\frac{z^{(i)}-z_1}{\delta_i}t \leqslant b_i \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

如果找到的最大值在 $t=t_0$ 时取, 则令

$$y_i=x_i+\frac{z_1^{(i)}-z_1}{\delta_i}t_0,$$

以 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 代替 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 继续进行, z 的值不断增大, 一直做到 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 的距离小于预给的精密度为止.

最陡上升法

假定在区域 $a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d$ 内,

$$z=F(x,y) \tag{1}$$

是一个向上凸的曲面, 处处有二阶连续微商, 并且假定在讨论的区域内仅有唯一的制高点.

在制高点 (x_0,y_0) 处,

$$z=F(x,y) \tag{2}$$

一定适合

$$F_x(x_0,y_0)=0, \quad F_y(x_0,y_0)=0. \tag{3}$$

由于曲面向上凸, 所以

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\xi^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\xi\eta+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\eta^2$$

是一个定负的二次型, 也就是一定存在两个正数 M 与 m 使

$$\begin{aligned}-M(\xi^2+\eta^2)\leqslant&\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\xi^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\xi\eta+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\eta^2\\ \leqslant&-m(\xi^2+\eta^2).\end{aligned}\tag{4}$$

由闭区域内连续函数的性质, M, m 与 x, y 无关.

从一点 (x_1,y_1) 出发, 若 $F(x_1,y_1)=z_1$ 对等高线

$$F(x,y)=z_1\tag{5}$$

沿着法线方向作直线

$$x=x_1+\left(\frac{\partial F}{\partial x}_1\right)t,\quad y=y_1+\left(\frac{\partial F}{\partial y}_1\right)t\quad(t\geqslant 0).\tag{6}$$

用单变数法, 沿此直线方向找

$$g(t)=F\left(x_1+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1 t, y_1+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1 t\right)$$

的最大值, 假定在 $t=t_1$ 时取最大值, 令

$$\begin{aligned}z_2=g(t_1)=&F\left(x_1+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1 t_1, y_1+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1 t_1\right)\\ \equiv&F(x_2,y_2),\end{aligned}\tag{7}$$

由于 $g(t)$ 也是凸函数, 因此

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{dt}g(t)\right|_{t=t_1}=&\frac{d}{dt}F\left(x_1+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1 t,\right.\\ &\left.\left. y_1+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1 t\right)\right|_{t=t_1}=0.\end{aligned}\tag{8}$$

我们现在研究 (与制高点高程差的进展比例)

$$\begin{aligned}\frac{z_0-z_2}{z_0-z_1}=&\frac{F(x_0,y_0)-F(x_2,y_2)}{F(x_0,y_0)-F(x_1,y_1)}\\ =&1-\frac{F(x_2,y_2)-F(x_1,y_1)}{F(x_0,y_0)-F(x_1,y_1)}.\end{aligned}\tag{9}$$

1) 分母

$$F(x_0,y_0)-F(x_1,y_1)=-\int_0^1\frac{d}{dt}F(x_0+t(t_1-x_0),$$

$$y_0+t(y_1,y_0))dt=-\int_0^1 dt\int_0^t\frac{d^2}{ds^2}F(x_0+s(x_1-x_0),$$

$$y_0+s(y_1-y_0)ds=-\int_0^1 dt\int_0^t[(x_1-x_0)^2F_{x^2}$$

$$+2(x_1-x_0)(y_1-y_0)F_{xy}+(y_1-y_0)^2F_{y^2}]ds,$$

由 (4) 可知

$$\begin{aligned}F(x_0,y_0)-F(x_1,y_1)&\leqslant M[(x_1-x_0)^2\\&\quad+(y_1-y_0)^2]\int_0^1 dt\int_0^t ds\\&=\frac{M}{2}[(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2].\end{aligned}\tag{10}$$

2) 再用 (根据 (7))

$$\begin{aligned}F(x_2,y_2)-F(x_1,y_1)&=\int_0^{t_1}\frac{d}{dt}F\left(x_1+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1t,\right.\\y_1+\left.\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1t\right)dt&=-\int_0^{t_1}dt\int_t^{t_1}\frac{d^2}{ds^2}F\left(x_1+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1s,\right.\\y_1+\left.\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1s\right)ds&=-\int_0^{t_1}dt\int_t^{t_1}\left(\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1^2F_{x^2}\right.\\&\quad\left.+2\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1F_{xy}+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1^2F_{y^2}\right)ds\\&\geqslant m\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1^2\right]\int_0^{t_1}(t_1-t)dt\\&=\frac{m}{2}t_1^2\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1^2\right].\end{aligned}\tag{11}$$

3) 从 (8) 式推得

$$\begin{aligned}&F_x\left[x_1+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1t_1,y_1+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1t_1\right]\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1\\&+F_y\left[x_1+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1t_1,y_1+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1t_1\right]\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1=0\end{aligned}\tag{12}$$

我们把

$$F_x\left(x_1+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)t_1,y_1+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1t_1\right)-F_x(x_1,y_1)$$

$$= \int_0^{t_1} \frac{d}{dt} F_x \left(x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_1 t, y_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_1 t \right) dt$$

及

$$F_y \left(x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_1 t_1, y_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_1 t_1 \right) - F_y(x_1, y_1)$$
$$= \int_0^{t_1} \frac{d}{dt} F_y \left(x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right), t, y_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_1 t \right) dt$$

代入 (12) 可知

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_1^2 &= - \int_0^{t_1} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_1 \frac{d}{dt} F_x \left(x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_1 t, y_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_1 t \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_1 \frac{d}{dt} F_y \left(x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_1 t, y_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_1 t \right) \right] dt \\ &= - \int_0^{t_1} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_1^2 F_{x^2} + 2 \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_1 \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_1 F_{xy} + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_1^2 F_{y^2} \right] dt,\end{aligned} \tag{13}$$

由 (4) 可知

$$\begin{aligned} m \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_1^2 \right] t_1 &\leqslant \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_1^2 \\ &\leqslant m \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_1^2 \right] t_1, \end{aligned}$$

即得

$$\frac{1}{M} \leqslant t_1 \leqslant \frac{1}{m}. \tag{14}$$

4) 由 (3) 可知

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_1 &= F_x(x_1, y_1) - F_x(x_0, y_0) \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} F_x(x_0 + t(x_1 - x_0), y_0 + t(y_1 - y_0)) dt \end{aligned}$$

及

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_1 = \int_0^1 \frac{d}{dt} F_y(x_0 + t(x_1 - x_0), y_0 + t(y - y_0)) dt,$$

并推出

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_1 (x_1 - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_1 (y_1 - y_0) = \int_0^1 [(x_1 - x_0)^2 F_{x^2}$$

$$+ 2(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)F_{xy} + (y_1 - y_0)^2 F_{y^2}]dt$$

由于 $\xi^2 F_{x^2} + 2\xi\eta F_{xy} + \eta^2 F_{y^2}$ 是定负的, 所以

$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1 (x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1 (y_1 - y_0)\right| &= \int_0^1 |(x_1 - x_0)^2 F_{x^2} \\ &\quad + 2(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)F_{xy} + (y_1 - y_0)^2 F_{y^2}|dt \\ &\geqslant m[(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2]. \end{aligned} \tag{15}$$

利用 Schwarz 不等式得到

$$m[(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2] \leqslant \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1^2\right]^{\frac{1}{2}} [(x - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2]^{\frac{1}{2}},$$

于是

$$m^2[(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2] \leqslant \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1^2. \tag{16}$$

综合 1), 2), 3) 及 4) 的结果, 可知

$$\begin{aligned}\frac{F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1)}{F(x_0, y_0) - F(x_1, y_1)} &\geqslant \frac{\frac{1}{2} m t_1^2 \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1^2\right]}{\frac{1}{2} M[(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2]} \\ &\geqslant \frac{m}{M^3} \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1^2}{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \\ &\geqslant \frac{m^3}{M^3},\end{aligned}$$

也就是

$$\frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_1} \leqslant 1 - \left(\frac{m}{M}\right)^3. \tag{17}$$

这个结果值得注意的地方是: 右边与 $z_{\bar{r}}$ 无关, 也就是从任一点开始, 做一次后, 与制高点的高程差缩小 $1 - \left(\frac{m}{M}\right)^3$ 倍, 如果做了 l 次, 则高程差与原来的高程差的比例是

$$\left(1 - \left(\frac{m}{M}\right)^3\right)^l.$$

取 l 使

$$\left[1 - \left(\frac{m}{M}\right)^3\right]^l \leqslant \varepsilon < \left[1 - \left(\frac{m}{M}\right)^3\right]^{l-1},$$

则必

$$l \geqslant \frac{\log \dfrac{1}{\varepsilon}}{\log \dfrac{1}{1-\left(\dfrac{m}{M}\right)^3}} > l-1,$$

也就是 l 的数量级等于 $\log \dfrac{1}{\varepsilon}$.

在一条直线上做黄金分割法的数量级也是 $\log \dfrac{1}{\varepsilon}$, 而每找一陡升方向需要做二个试验, 因此总共的试验次数的数量级是

$$\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^2.$$

这方法可以推广到 s 个因素, 而由于每找一次陡升方向需做 s 个试验, 所以总的试验次数的数量级仍是

$$\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^2.$$

最陡上升法形式上与第一章所讲的旋升法有所不同, 实质上是一样的. 旋升法的要点是先求一条直线 l_1 上 $F(x,y)$ 的最大值, 取这最大值的点 (x_1,y_1) 就是这直线与某等高线的切点, 陡升方向就是法线方向, 也就是在 (x_1,y_1) 点找过这点的等高线的法线方向, 因而原则上并无不同.

旋升法不但易行, 而且不必要用差分逼近微分, 不必要每次做二个试验来确定陡升方向.

渐近陡升法

在上节所讨论的最陡上升法中, 如果函数 $F(x,y)$ 的表达式已知, 二个偏导数 $\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}$ 可以通过计算直接得到. 但在实际应用时, 对所求的目标函数绝大部分是连续函数的形式, 是不知道的. 因此, 要求出在一点的陡升方向也只有用做试验的办法, 一般可以这样做: 在点 (x,y) 附近, 沿坐标轴的方向各找一点 $(x+\delta_1,y)$ 和 $(x,y+\delta_2)$, 在这二点做试验, 并计算出

$$\frac{f(x+\delta_1,y)-f(x,y)}{\delta_1} \text{ 和 } \frac{f(x,y+\delta_2)-f(x,y)}{\delta_2}.$$

当 δ_1,δ_2 取得适当小时, 它们便给出点 (x,y) 处的两个偏导数的 (近似) 值.

把这个方法过渡到一般的情况, 便是渐渐陡升法了.

保持本章开始时述要部分所用的记号.

我们现在每次沿最陡的方向上升距离为 ε 的一步, 也就是取 t 使

$$x_1+\frac{z_1^{(1)}-z_1}{\delta_1}t,\cdots,x_n+\frac{z_1^{(n)}-z_1}{\delta_n}t\quad(t>0)$$

与 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的距离等于

$$t\sqrt{\left(\frac{z_1^{(1)}-z_1}{\delta_1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{z_1^{(n)}-z_1}{\delta_n}\right)^2}=\varepsilon.$$

取 ε 小到可以分辨的情况, 则得渐近陡升法, 这就是在山坡上, 每次向最陡的方向走上长度为 ε 的一步, 这个办法虽然不如前法快 —— 一步跨到山脊 —— 但是对于不能跳跃做试验的情况比较合适.

一般讲来, 我们可以取合适的单位使

$$\delta_1=\delta_2=\cdots=\delta_n,$$

并且不妨假定 $\delta_i=\varepsilon$, 也就是用

$$x_i+\frac{z_1^{(i)}-z_1}{\sqrt{(z_1^{(1)}-z_1)^2+\cdots+(z_1^{(n)}-z_1)^2}}\varepsilon$$
$$(i=1,2,\cdots,n)$$

来代替原来的 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

二 次 模 拟

在 §1 中我们找到收敛因子

$$\left(1-\left(\frac{m}{M}\right)^3\right).$$

在统计学中, 我们经常 (不太令人放心地) 假定数学模型是二次的. 下面将证明, 如果真是二次的, 收敛因子还可以有所改进, 这说明在靠近最优点时, 也就是用 Taylor 级数的二次及二次以下的项来逼近时, 实际上收敛速度要比 §1 所讲的要快得多.

也就是我们检查最陡上升法用在以下特例上的收敛情况:

$$F(x_1,\cdots,x_n)=c+2\sum_{i=1}^n b_ix_i-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j,$$

这儿 $a_{ij}=a_{ji}$, (a_{ij}) 是定正的对称方阵, 它的特征根

$$0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n.$$

经过刚体运动, 以及在 F 上减一常数, 我们可以不失普遍性地考虑以下的特例:

$$Q(x_1, \cdots, x_n) = -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2,$$

它的最大值是 0, 在 $x_1 = \cdots = x_n = 0$ 处取.

从一定点 $(x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$ 出发, 在这点的陡升方向是

$$(-2\lambda_1 x_1^{(0)}, \cdots, -2\lambda_n x_n^{(0)}).$$

研究

$$f(t) = Q(x_1^{(0)} - 2\lambda_1 x_1^{(0)} t, \cdots, x_n^{(0)} - 2\lambda_n x_n^{(0)} t)$$

的最大值, 由于

$$\begin{aligned} f(t) &= -\sum_{v=1}^{n} \lambda_v x_v^{(0)2} (1 - 2\lambda_v t)^2 = -\sum_{v=1}^{n} \lambda_v \lambda_v^{(0)2} \\ &\quad + 4t \sum_{v=1}^{n} \lambda_v^2 x_v^{(0)2} - 4t^2 \sum_{v=1}^{n} \lambda_v^3 x_v^{(0)2} = -\sum_{v=1}^{n} \lambda_v x_v^{(0)2} \\ &\quad + \frac{\left(\sum\limits_{v=1}^{n} \lambda_v^2 x_v^{(0)2}\right)^2}{\sum\limits_{v=1}^{n} \lambda_v^3 x_v^{(0)2}} - \sum \lambda_v^3 x_v^{(0)2} \left(2t - \frac{\sum \lambda_v^2 x_v^{(0)2}}{\sum \lambda_v^3 x_v^{(0)2}}\right)^2 \end{aligned}$$

所以, 当

$$t = t^* = \frac{\sum \lambda_v^2 x_v^{(0)2}}{2 \sum \lambda_v^3 x_v^{(0)2}}$$

时, 即当

$$x_v^{(1)} = x_v^{(0)} - \lambda_v x_v^{(0)} \cdot \frac{\sum \lambda_v^2 x_v^{(0)2}}{\sum \lambda_v^3 x_v^{(0)2}}$$

时, 取最大值

$$\begin{aligned} Q(x_1^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)}) = f(t)^* &= -\sum_{v=1}^{n} \lambda_v x_v^{(0)2} \\ &\quad + \frac{\left(\sum\limits_{v=1}^{n} \lambda_v^2 x_v^{(0)2}\right)^2}{\sum\limits_{v=1}^{n} \lambda_v^3 x_v^{(0)2}}. \end{aligned}$$

现在利用不等式 (其证明在下节)

$$\sum_{v=1}^{n}\frac{a_v}{\lambda_v}\sum_{v=1}^{n}a_v\lambda_v \leqslant \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}}+\sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}\right)^2\cdot\left(\sum_{v=1}^{n}a_v\right)^2,$$

得

$$\begin{aligned}\frac{Q(x_1^{(1)},\cdots,x_n^{(1)})}{Q(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})} &= 1-\frac{\left(\sum\limits_{v=1}^{n}\lambda_v^2 x_v^{(0)2}\right)^2}{\sum\limits_{v=1}^{n}\lambda_v x_v^{(0)2}\sum\limits_{v=1}^{n}\lambda_v^3 x_v^{(0)2}} \\ &\leqslant 1-\frac{4}{\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}}+\sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}\right)^2} \\ &= \left(\frac{\lambda_n-\lambda_1}{\lambda_n+\lambda_1}\right)^2.\end{aligned}$$

回到一般的形式, λ_n 就是 M, λ_1 就是 m, 因此收敛因子是

$$\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2,$$

且

$$\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 < \left(1-\left(\frac{m}{M}\right)^3\right).$$

由于下节末段所指出的论点, 这因子是不能再改进的. 这结果指出 §1 的收敛因子是有改进的可能性的, 如果能找到一个结果连偏微商的差分逼近的误差也包括在内, 那就更好.

反向 Schwarz 不等式

现在证明上节的不等式: 如果

$$0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n,\quad a_i\geqslant 0,$$

则

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i}\leqslant\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}}+\sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2.$$

证: 此不等式的左边是 λ_i 的函数

$$f(\lambda_i)=p+q\lambda_i+\frac{r}{\lambda_i}\quad(p>0,q>0,r>0),$$

其二阶微商大于零, 因此在 $\lambda_1<\lambda_i<\lambda_n$ 中不可能有最大值. 仅当 $\lambda_i=\lambda_1$ 或 λ_n 时, 它才能最大, 也就是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i}\leqslant&\left(\lambda_1\sum_{i=1}^{m}a_i+\lambda_n\sum_{j=m+1}^{n}a_j\right)\left(\frac{1}{\lambda_1}\sum_{i=1}^{m}a_i+\frac{1}{\lambda_n}\sum_{j=m+1}^{n}a_j\right)\\ =&\left(\sum_{i=1}^{m}a_i\right)^2+\left(\sum_{j=m+1}^{n}a_j\right)^2+\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}+\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)\sum_{i=1}^{m}a_i\sum_{j=m+1}^{n}a_j=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2\\ &+\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}+\frac{\lambda_n}{\lambda_1}-2\right)\sum_{i=1}^{m}a_i\sum_{j=m+1}^{n}a_j\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2\\ &+\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}}-\sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}\right)^2\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2}{4}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}}+\sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2,\end{aligned}$$

当且仅当

$$\lambda_1=\cdots=\lambda_m,\quad \lambda_{m+1}=\cdots=\lambda_n$$

及

$$\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=m+1}^{n}a_j$$

时取等号.

收敛因子的进一步改进

在 §1 中我们粗略地估计出了

$$\frac{z_0-z_2}{z_0-z_1}\leqslant 1-\left(\frac{m}{m}\right)^3. \tag{1}$$

而在 §2 中, 我们对二次目标函数证明了: 收敛因子 $1-(m/M)^3$ 可以改进为 $\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2$. 在本节中我们将对一般的目标函数证明与二次目标函数相同的结果.

考虑

$$z=f(x), \tag{2}$$

这里 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_s)$. 假设 $f(x)$ 具有三阶连续偏微商, 且是一个一致的凹函数 (在一维和二维时, 即以前讲的"向上凸"函数).

引进记号:

$$g(x)=\nabla f(x)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_s}\right) \tag{3}$$

称为 f 在点 x 处的梯度.

$$H(x)=\nabla^2 f(x)=\left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant s} \tag{4}$$

称为 f 在点 x 的二阶微分矩阵, 又称 Hessian 阵.

最陡上升法是从一点 $x^{(v)}=(x_1^{(v)},\cdots,x_s^{(v)})$ 出发沿着梯度方向作直线

$$x=x^{(v)}+tg_v \quad (t\geqslant 0) \tag{5}$$

$(g_v=g(x^{(v)}))$, 用单变数法求出 $f(x)$ 在这直线上的最大值. 假定在 $t=t_v$ 时取此值, 令

$$x^{(v+1)}=x^{(v)}+t_v g_v. \tag{6}$$

然后从 $x^{(v+1)}$ 出发重复上面的步骤迭代进行.

用 §1 同样的方法, 可以估出

$$\begin{aligned}f(x^{(v)})-f(x^{(0)})&=\int_0^1 g(x^{(0)}+t(x^{(v)}-x^{(0)}))(x^{(v)}-x^{(0)})'dt\\&=\int_0^1[g(x^{(0)}+t(x^{(v)}-x^{(0)}))-g(x^{(0)})](x^{(v)}-x^{(0)})'dt\\&=\int_0^1 dt\int_0^t(x^{(v)}-x^{(0)})H(x^{(0)}+s(x^{(0)}-x^{(0)}))(x^{(v)}-x^{(0)})'ds\\&=\int_0^1 dt\int_0^t(x^{(v)}-x^{(0)})(H_v+o(|x^{(v)}-x^{(0)}|))(x^{(v)}\\&\quad-x^{(0)})'ds=\frac{1}{2}(x^{(v)}-x^{(0)})H_v(x^{(v)}-x^{(0)})'\\&\quad+o(|x^{(v)}-x^{(0)}|^3).\end{aligned} \tag{7}$$

这里 $H_v=H(x^{(v)})$, $x^{(0)}$ 是 $z=f(x)$ 取最大值的点, 故有 $g(x^{(0)})=0$. 同样可得

$$\begin{aligned}g_v&=\int_0^1(x^{(v)}-x^{(0)})H(x^{(0)}+t(x^{(v)}-x^{(0)}))dt\\&=(x^{(v)}-x^{(0)})H_v+o(|x^{(v)}-x^{(0)}|^2).\end{aligned} \tag{8}$$

所以

$$x^{(v)}-x^{(0)}=g_v H_v^{-1}+o(|x^{(v)}-x^{(0)}|^2),$$

因此

$$f(x^{(v)})-f(x^{(0)})=\frac{1}{2}g_v H_v^{-1}g_v'+o(|x^{(v)}-x^{(0)}|^3). \tag{9}$$

又有

$$\begin{aligned} f(x^{(v)}) - f(x^{(v+1)}) &= -\int_0^{t_v} g(x^{(v)} + tg_v)g_v' dt \\ &= \int_0^{t_v} dt \int_t^{t_v} g_v H(x^{(v)} + sg_v) g_v' ds \\ &= \int_0^{t_v} dt \int_t^{t_v} g_v [H_v + o(|g_v|)] g_v' ds \\ &= \frac{1}{2} t_v^2 g_v H_v g_v' + o(|g_v|^3). \end{aligned} \tag{10}$$

由于 $f(x^{(v)} + tg_v)$ 在 $t = t_v$ 取极值, 所以

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} f(x^{(v)} + tg_v)|_{t=t_v} = g(x^{(v)} + t_v g_v) g_v' \\ &= [g_v + t_v g_v H_v + o(|g_v|^2)] g_v', \end{aligned} \tag{11}$$

即

$$t_v = -\frac{g_v g_v'}{g_v H_v g_v'} + o(|g_v|). \tag{12}$$

代入 (10), 得

$$f(x^{(v)}) - f(x^{(v+1)}) = \frac{1}{2} \frac{|g_v|^4}{g_v H_v g_v'} + o(|g_v|^3). \tag{13}$$

综合 (9) 和 (13),

$$\begin{aligned} \frac{f(x^{(0)}) - f(x^{(v+1)})}{f(x^{(0)}) - f(x^{(v)})} &= 1 - \frac{f(x^{(v+1)}) - f(x^{(v)})}{f(x^{(0)}) - f(x^{(v)})} \\ &= 1 - \frac{|g_v|^4 / g_v H_v g_v' + o(|g_v|^3)}{g_v H_v^{-1} g_v + o(\|x^{(v)} - x^{(0)}\|)} \\ &= 1 - \frac{|g_v|^4}{(g_v H_v^{-1} g_v')(g_v H_v g_v')} \end{aligned} \tag{14}$$

根据假定, $f(x)$ 是一致凹的, 所以 H_v 定负, 记其特征根为 $-\lambda_1, -\lambda_2, \cdots, -\lambda_s, (0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_s)$. 则有正交变换矩阵 Q, 使

$$QH_vQ' = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & & & \\ & -\lambda_2 & 0 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & -\lambda_s \end{pmatrix}.$$

记 $a_v = g_v Q$, (14) 式变为

$$\frac{f(x^{(0)}) - f(x^{(v+1)})}{f(x^{(0)}) - f(x^{(v)})} = 1 - \frac{|a_v|^4}{\sum_{k=1}^{s} \lambda_k a_{v}^2, k \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{\lambda_k} a_{v,k}^2} + o(|g_v|).$$

略去无穷小项, 并应用反向 Schwarz 不等式得

$$\frac{f(x^{(0)})-f(x^{(v+1)})}{f(x^{(0)})-f(x^{(v)})}\leqslant 1-\frac{4}{\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_s}}+\sqrt{\frac{\lambda_s}{\lambda_1}}\right)^2}=\left(\frac{\lambda_s-\lambda_1}{\lambda_s+\lambda_1}\right)^2.$$

于是我们得出

定理　若 $f(x)\in c^3$, 且有

$$-Mgg'\leqslant gH(x)g'\leqslant -mgg',$$

则

$$\frac{z^{(0)}-z^{(v+1)}}{z^{(0)}-z^{(v)}}=\frac{f(x^{(0)})-f(x^{v+1})}{f(x^{(0)})-f(x^{(v)})}\leqslant\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2.$$

切 块 法

述 要

我们的目的是要在区域 R_0 中找出函数

$$z = f(x, y)$$

的最大值, 在 R_0 中取一点 $p_0(x_0, y_0)$, 在 (x_0, y_0) 及其邻近两点 (x_0+h, y_0), (x_0, y_0+k) 作试验, 得 $f(x_0, y_0)$, $f(x_0+h, y_0)$, $f(x_0, y_0+k)$ 的数值, 这里 h, k 以小为好, 但又要使诸 f 值可以分辨. 作

$$p_0' : \left(x_0 + \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}, y_0 + \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k}\right).$$

过 p_0 作垂直于 p_0, p_0' 联线的垂线 l_0, 这垂线分 R_0 为两部分, 丢掉不含有 p_0' 的部分, 留下的部分用 R_1 表示, 再在其中取一点 $p_1, \cdots$.

这方法的道理是显然的, 因为分割是沿通过 p_0 的等高线的切线, 且留下部分包括升高方向的一边. 问题在于怎样选 p_0? 我们有下面几个建议.

第一个建议是: 取 p_0 为 R_0 的重心, 以下将证明, 这一方法是有保证的. 下文将证明, 通过重心的任一直线把凸域分为两份, 其面积的比在 4/5 及 5/4 之间, 因此, 每次留下的部分的面积不大于原面积的 5/9, 做 n 次后, 留下的部分不大于原面积乘 $(5/9)^n$, 因而 n 充分大时, 这方法保证是可以无限精密的.

第二个建议是: 取余下的部分中的法线的中点 p_1, 作为下一次试验的 p_0, 这方法简单易行, 但还没有数学保证, 以下的附记可供参考. 如果 p_1 做出来的实验比 p_0 小得多, 可以不必在 p_1 附近再做试验, 而在 p_1, p_0 的联线的中点 p_2 做试验. 如果还小得多, 可以在 p_2, p_0 的中点 p_3 做试验, 等等, 得到和 p_0 所做出的差不多好或更好些的点 p^*, 再在 p^* 用上面的方法, 这样可以加强这个方法的可靠性.

第三个方法. 假设我们所研究的对象是多边形, 其顶点各为 $(x_i, y_i)(i = 1, 2. \cdots, l)$, 我们可以用

$$\left(\frac{1}{l}(x_1 + \cdots + x_l), \frac{1}{l}(y_1 + \cdots + y_l)\right)$$

作为下一个试点. 但通过这个点的直线, 并没有分图形为两部其比例有上下限的性质.

当推广到 s 个变数时, 找重心也并不容易, 但本章的方法并不是没有实用价值的, 而理论方面还有深入探讨的必要.

一个几何不等式 (二维)

定理　通过一凸区域的重心的任意直线把凸域一分为二, 其面积之比不小于 4/5, 不大于 5/4.

为了替高维作准备, 我们在讲几何直观证明的同时, 还讲易于推广的解析形式.

凸域 D 的定义是: 如果两点 (x_1,y_1), (x_2,y_2) 在 D 内, 则这两点间的直线段也在其中, 即它含有

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1), \quad y = y_1 + t(y_2 - y_1)$$

$$(0 \leqslant t \leqslant 1). \tag{1}$$

区域 D 的面积等于

$$A = \iint_D dxdy, \tag{2}$$

其重心的坐标是

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\iint_D xdxdy, \tag{3}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\iint_D ydxdy. \tag{4}$$

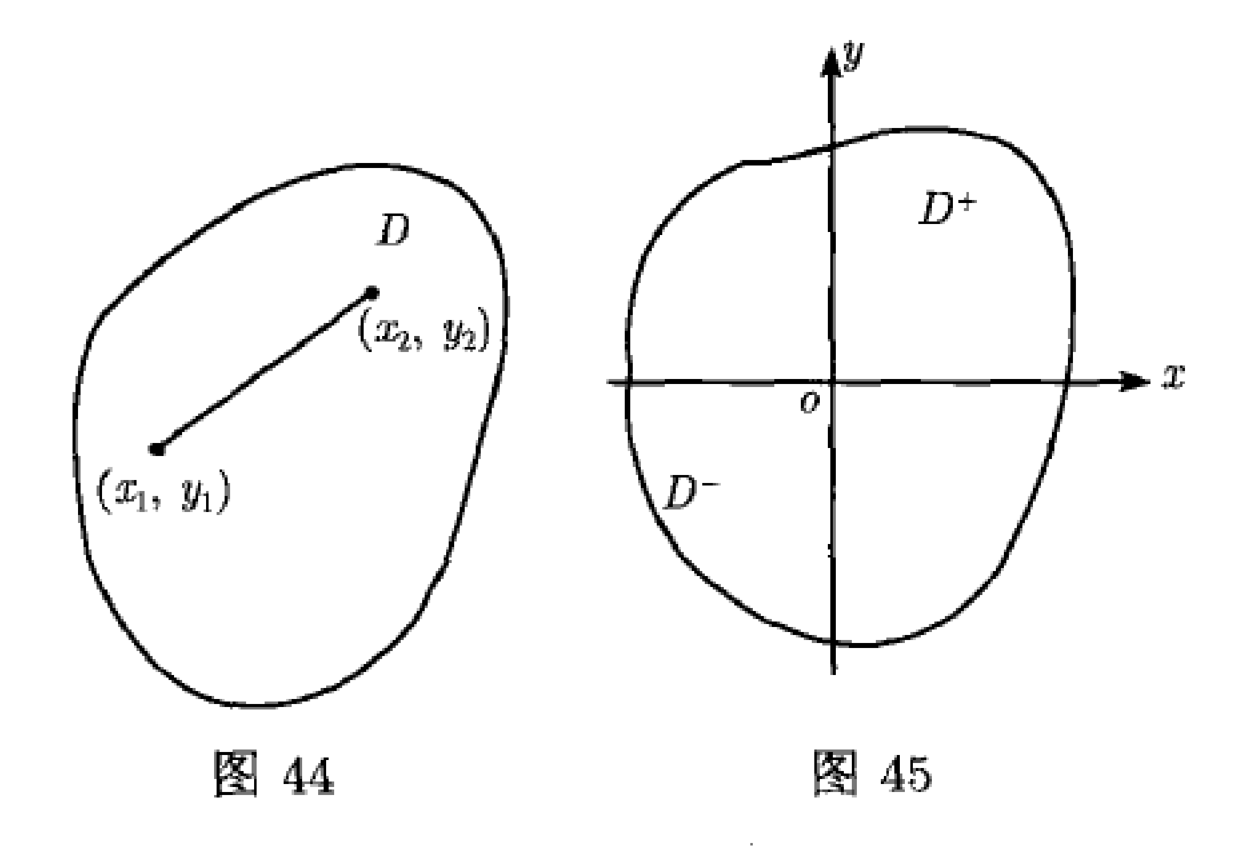


图 44　　图 45

假定分割 D 的直线就是 x 轴, 则重心在 x 轴上, 即

$$\iint_D ydxdy = 0, \tag{5}$$

x 轴分 D 为两部分, 轴上的用 D^+ 表示, 轴下的用 D^- 表示, 并用 $|D|$ 表示 D 的面积, 则定理的结论就是

$$\left|\frac{D^+}{D^-}\right| \geqslant \frac{4}{5}, \quad \left|\iint_{D^+} dxdy\right| \geqslant \frac{4}{5}\left|\iint_{D^-} dxdy\right|, \tag{6}$$

而定理的假定就是 (5) 式, 也就是

$$\iint_{D^+} ydxdy = -\iint_{D^-} ydxdy. \tag{7}$$

这就是说如果上半块对 x 轴的力矩等于下半块对 x 轴的力矩时, 我们有不等式 (6). 不等式 (6) 的 D^+, D^- 可颠倒, 因而得到与定理等价的结论.

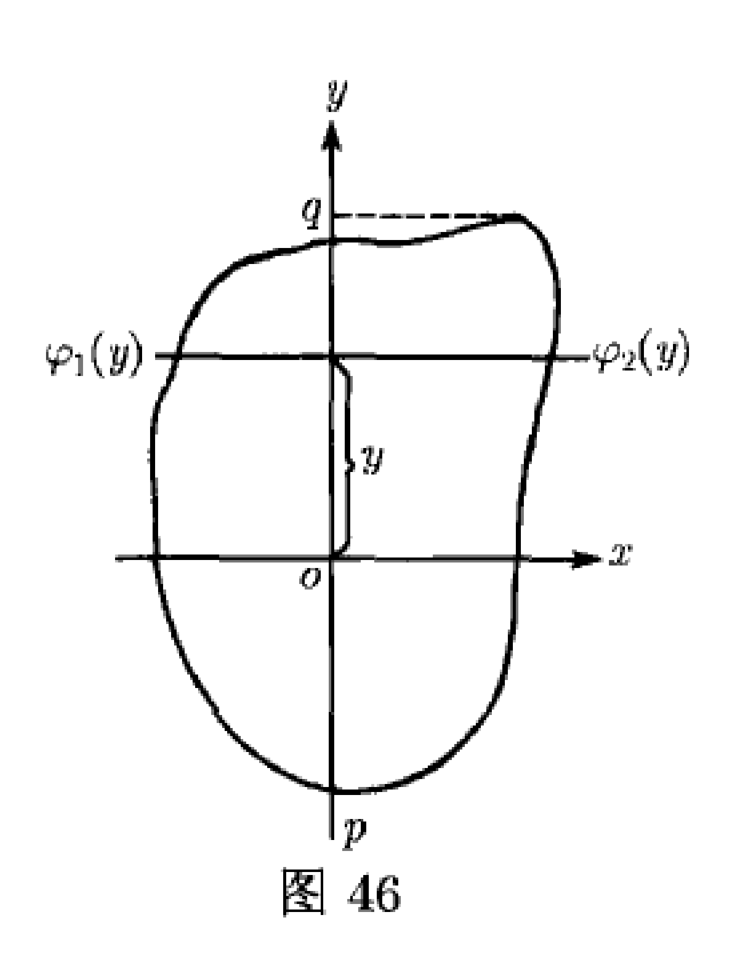


图 46

证明分三步进行:

1) 对称化, 也就是在保持面积和力矩不变的情况下, 我们可以把 D 改变成为对称于 y 轴的形式, 几何直观来说是: 把每条平行于 x 轴的, 两端在 D 的边界上的线段, 水平移动, 使其中点在 y 轴上, 这样移动后所得出的 D' 对于 y 轴对称, 而且面积与力矩都不变.

解析表示又怎样呢? 我们看到, 当 y 固定时, x 的积分范围是

$$\varphi_1(y) \leqslant x \leqslant \varphi_2(y),$$

因此

$$\begin{aligned}\iint_D dxdy &= \int_p^q dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} dx = \int_p^q (\varphi_2(y) - \varphi_1(y))dy \\ &= \int_p^q dy \int_{-\frac{1}{2}(\varphi_2(y)-\varphi_1(y))}^{\frac{1}{2}(\varphi_2(y)-\varphi_1(y)} dx,\end{aligned}$$

以及

$$\iint_D ydxdy = \int_p^q ydy \int_{-\frac{1}{2}(\varphi_2(y)-\varphi_1(y))}^{\frac{1}{2}(\varphi_2(y)-\varphi_1(y))} dx,$$

也就是我们的区域 D 变为

$$D' : p \leqslant y \leqslant q, \quad -\frac{1}{2}(\varphi_2(y) - \varphi_1(y))$$

$$\leqslant x \leqslant \frac{1}{2}(\varphi_2(y) - \varphi_1(y)).$$

现在要证明 D' 也是凸的, 也就是如果 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 属于 D', 则

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1), \quad y = y_1 + t(y_2 - y_1) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

也属于 D'. 后一式是显然的. 由于

$$-\frac{1}{2}(\varphi_2(y_1) - \varphi_1(y_1)) \leqslant x_1 \leqslant \frac{1}{2}(\varphi_2(y_1) - \varphi_1(y_1)),$$
$$-\frac{1}{2}(\varphi_2(y_2) - \varphi_1(y_2)) \leqslant x_2 \leqslant \frac{1}{2}(\varphi_2(y_2) - \varphi_1(y_2)),$$

可知

$$-\frac{1}{2}[(1-t)(\varphi_2(y_1) - \varphi_1(y_1)) + t(\varphi_2(y_2) - \varphi_1(y_2))]$$
$$\leqslant x \leqslant \frac{1}{2}[(1-t)(\varphi_2(y_1) - \varphi_1(y_1) + t(\varphi_2(y_2) - \varphi_1(y_2))].$$

因为 D 是凸的, 所以

$$(1-t)\varphi_2(y_1) + t\varphi_2(y_2) \leqslant \varphi_2(y)(1-t)\varphi_1(y_1) + t\varphi_1(y_2) \geqslant \varphi_1(y).$$

由此推出 (x, y) 也属于 D'.

因此, 并不失去普遍性, 我们可以假定 D 是对 y 轴对称的.

2) 拉直. x 轴交 D 的边界于 P, Q 二点, 在 y 轴上找一点 R 作等腰三角形使其力矩等于 D^+ 的力矩. 我们证明三角形 PQR 的面积不大于 D^+ 的面积, 也就是从

$$\iint\limits_{D^+} y dx dy = \iint\limits_{\Delta PQR} y dx dy$$

推出

$$\iint\limits_{D^+} dx dy \geqslant \iint\limits_{\Delta} dx dy.$$

三角形的高交 D^+ 的边界于 $y = y_0$, 在三角形内而不在 D^+ 的点的 $y \geqslant y_0$, 在 D^+ 不在三角形内的点的 $y \leqslant y_0$, 即得所证.

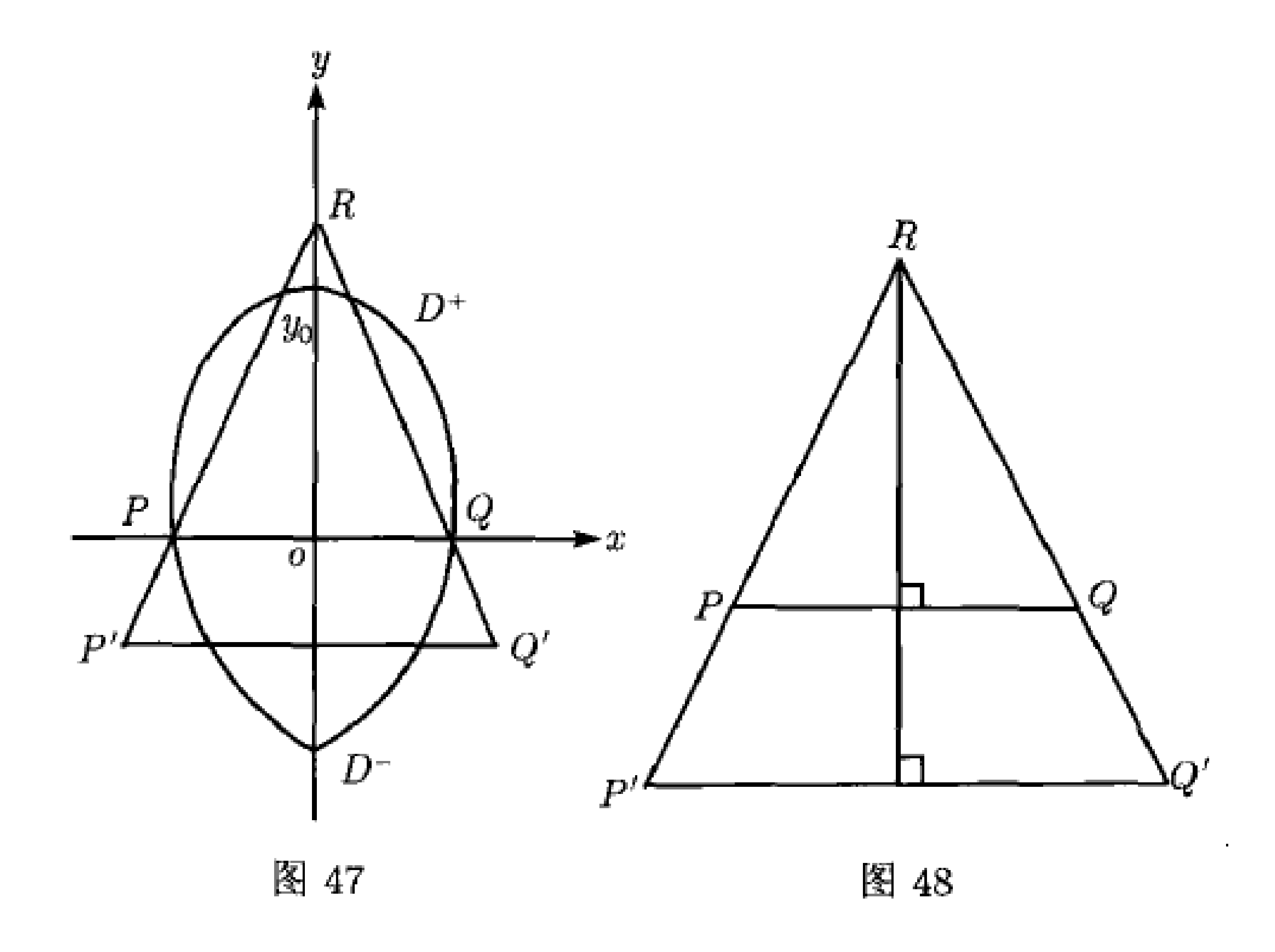


图 47 图 48

再把 RP 和 RQ 分别延长到 P', Q', 使得 $P'Q'$ 平行于 x 轴, 使梯形 $PP'Q'Q$ 的力矩等于 D^- 的力矩, 同样可推得

梯形 $PP'Q'Q$ 的面积 $\geqslant D^-$ 的面积,

因此

$$\left|\frac{D^+}{D^-}\right| \geqslant \frac{|\Delta PQP|}{\text{梯形}PP'Q'Q},$$

由于力矩相等, $\Delta P'Q'R$ 的重心仍在 x 轴上.

因此, 只需证明

3) 等腰三角形过重心平行底边的直线分三角形为两部分

$$\frac{|\Delta PQR|}{|\text{梯形}PP'Q'Q|} = \frac{4}{5}$$

由于 R 到重心的距离等于高的 2/3, 因此三角形 PQR 的面积是 $\Delta P'Q'R$ 的面积的 4/9, 即得所证.

以下就依这三个步骤, 把切块法推广到 s 个变数的情况.

s 维锥形的体积与重心

s 维锥形的底盘是在 $x_s = 0$ 的超平面上, 半径为 r 的 $s-1$ 维球

$$x_1^2 + \cdots + x_{s-1}^2 \leqslant r^2,$$

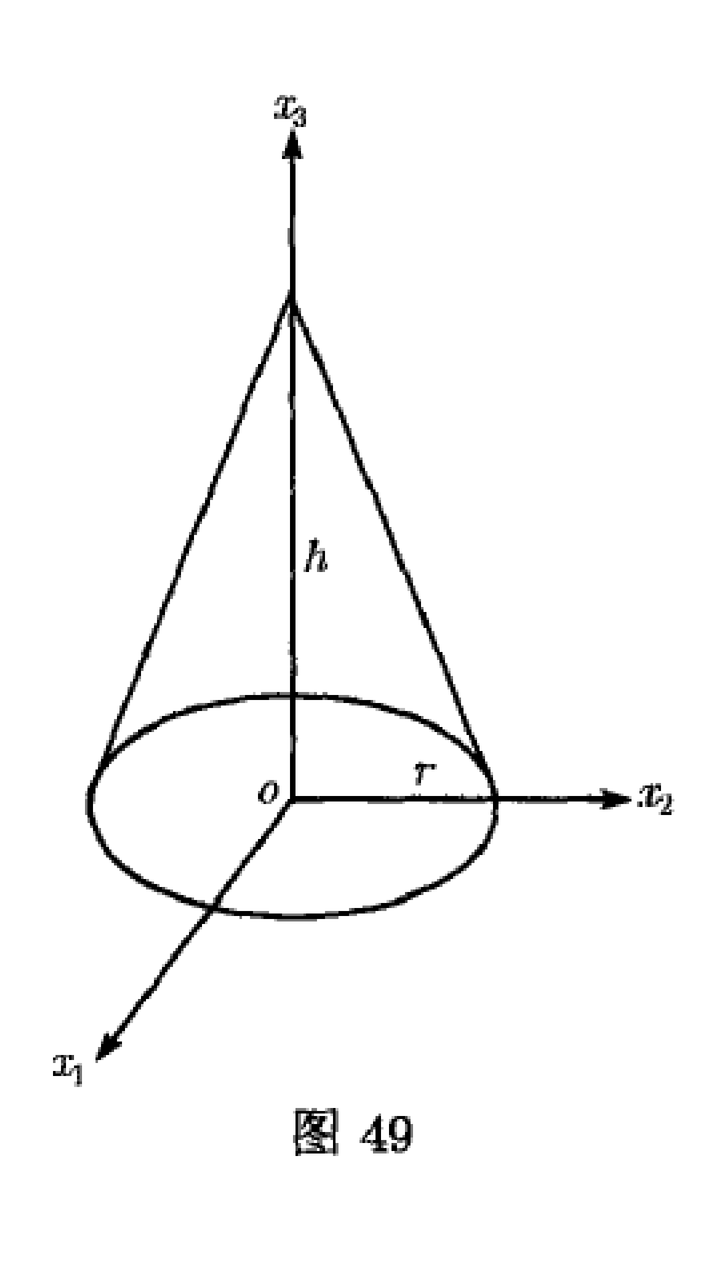


图 49

其高为 h, 当 $x_s=0$ 时, 半径 ρ 等于 r, 当 $x_s=h$ 时, 半径 ρ 等于 0, 边界的方程是

$$\rho = r\frac{h-x_s}{h}.$$

因此, 锥形的体积

$$\begin{aligned}V_s &= \int_0^h dx_s \int\cdots\int dx_1\cdots dx_{s-1}x_1^2+\cdots+x_{s-1}^2\\ &\leqslant \rho^2 = \int_0^h \rho^{s-1}dx_s\int\cdots\int dx_1\cdots dx_{s-1}x_1^2+\cdots\\ &\quad + x_{s-1}^2\leqslant 1 = w_{s-1}\int_0^h\left(\frac{r}{h}(h-x_s)^{s-1}\right)dx_s\\ &= w_{s-1}r^{s-1}h\int_0^1(1-t)^{s-1}dt\\ &= \frac{w_{s-1}r^{s-1}h}{s},\end{aligned}$$

这里 W_{s-1} 是 $s-1$ 维单位球的体积, 这公式也可以述为: s 维锥的体积等于底积乘高的 s 分之一.

对超平面 $x_s=0$ 的力矩等于

$$\begin{aligned}\int\cdots\int x_s dx_1\cdots dx_s &= \int_0^h x_s dx_s\int\cdots\int dx_1\cdots dx_{s-1}x_1^2+\cdots+x_{s-1}^2\\ &\leqslant \rho^2 = w_{s-1}r^{s-1}h^2\int_0^1(1-t)^{s-1}tdt\\ &= w_{s-1}r^{s-1}h^2/s(s+1).\end{aligned}$$

因此, 重心的坐标是

$$\bar{x}_1=\bar{x}_2=\cdots=\bar{t}_{s-1}=0,\quad \bar{x}_s=\frac{h}{s+1}.$$

过重心平行于 $x_s=0$ 的超平面把 s 维锥分为两部分, 其一是高为原高的 $1-\frac{1}{s+1}$ 倍, 即依顶点缩小 $\frac{s}{s+1}$ 的圆锥, 它是原来圆锥体积的

$$\left(\frac{s}{s+1}\right)^s$$

倍, 因此圆锥被过重心的平面 $x_s=\frac{h}{s+1}$ 分为两部分, 其体积之比是

$$\frac{\left(\frac{s}{s+1}\right)^s}{1-\left(\frac{s}{s+1}\right)^s},$$

这相当于上节的第三步.

对 称 化

我们假定 s 维凸体 D 被过重心的超平面

$$x_s = 0$$

分为两部分, 上、下半部各以 D^+, D^- 表之, 则问题变为在

$$\int_{D^+}\cdots\int x_s dx_1\cdots dx_s = -\int_{D^-}\cdots\int x_s dx_1\cdots dx_s \tag{1}$$

的条件下, 求比例

$$\int_{D^+}\cdots\int dx_1\cdots dx_s \Big/ \int_{D^-}\cdots\int dx_1\cdots dx_s \tag{2}$$

的上下界的问题.

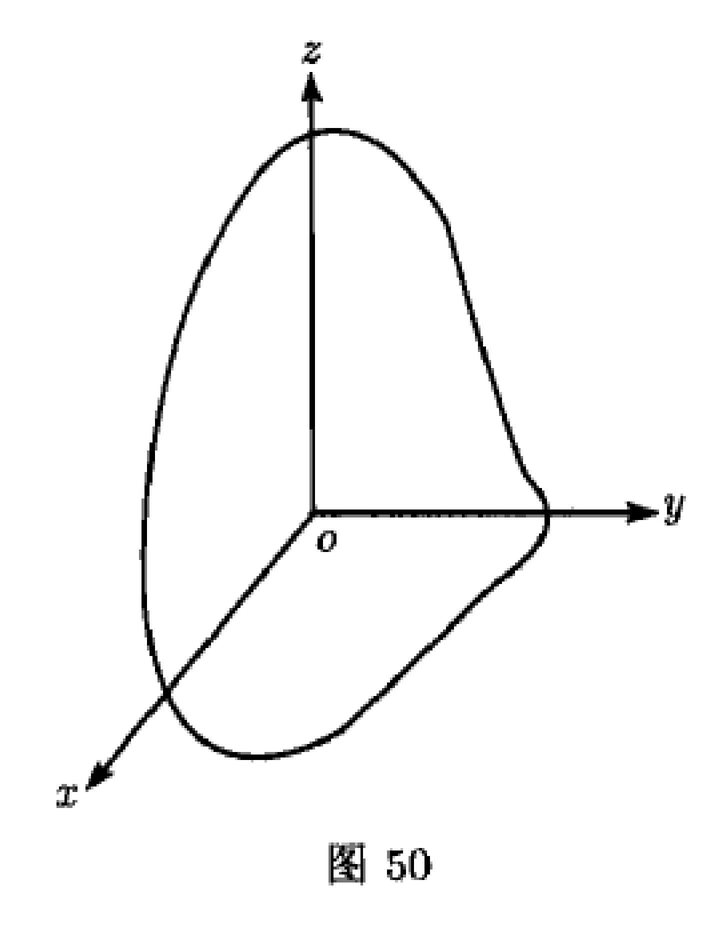


图 50

先用对称化的方法, 不妨假定 D 是旋转体, 再由"拉直"法来得出我们的结论.
为叙述简单, 我们假定 $s=3$, 将 (x_1,x_2,x_3) 写为 (x,y,z).
依 xz 平面对称化, 一垂直于 xz 平面的直线交凸体于二点 p,q, 把这线段的中点移到 xz 平面上, 则得出另一体 D_1, D_1 的 D_1^+, D_1^- 的体积和力矩仍然相等, 即

$$\iiint_{D^+} zdzdxdy = \iiint_{D_1^+} zdzdxdy,$$

$$\iiint_{D^-} zdzdxdy = \iiint_{D_1^-} zdzdxdy,$$

$$\iiint\limits_{D^+} dzdxdy = \iiint\limits_{D_1^+} dzdxdy,$$

$$\iiint\limits_{D^-} dzdxdy = \iiint\limits_{D_1^-} dzdxdy. \tag{3}$$

这一点的证明是很容易的, 因为当 x, z 定了, y 的积分范围是

$$\varphi(x,z) \leqslant y \leqslant \varphi(x,z), \iiint f(z)dzdxdy = \iint f(z)dzdx \int_{\varphi(x,z)}^{\varphi(x,x)} dy.$$

因而可用类似于 §2 的方法证得 (3) 式, 并且同样方法证明 D_1 也是凸的,

实际上, 以上的方法可以用任何一个过 z 轴的平面来代替, 这样我们得出一系列的凸域, 这些凸域的极限是一个绕 z 轴的旋转体, 为了证明这一点, 我们讲得更具体些.

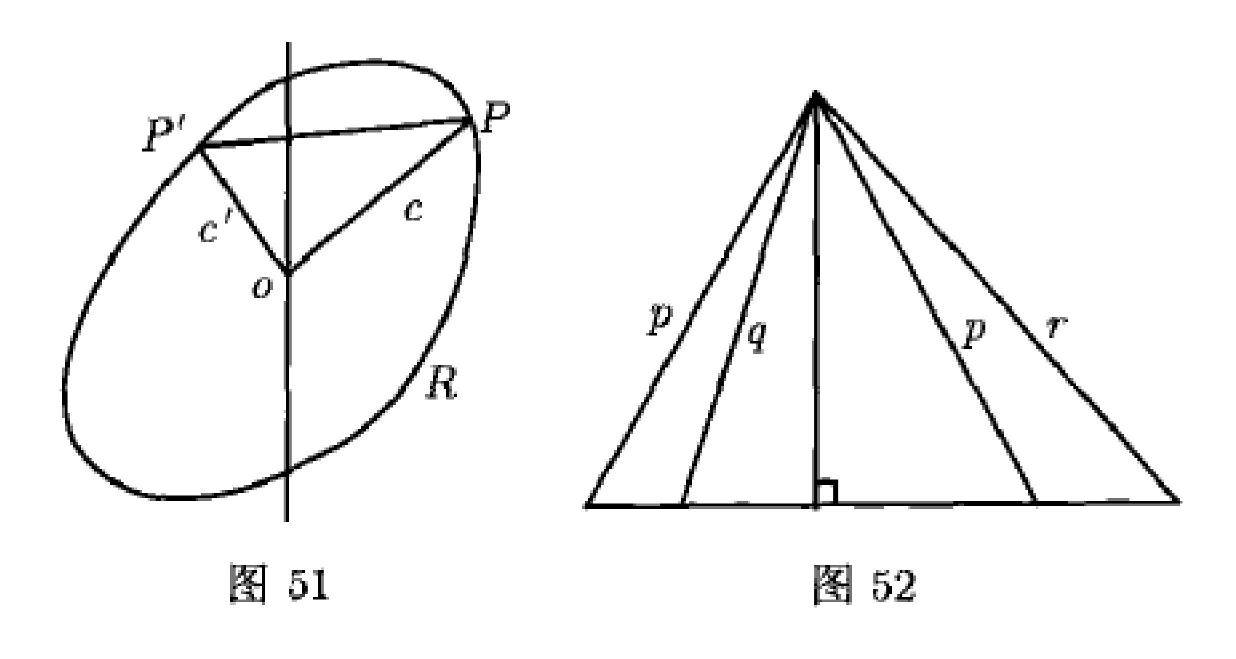


图 51　　图 52

先固定一个 $a, z = a$ 截凸体得一平面凸域 R_a, R_a 的周界距原点最远、最近的距离分别为 C 与 C', 点在 P 与 P'. 从原点作直线垂直于 P', P 的联线, 依这条直线对称化, 得出来的图形长径一定比 C 小, 短径一定比 C' 大 (注意, 由于等腰三角形顶点到底边上一点的联线一定比腰长短, 到底边延线上一点的联线一定比腰长长, 因此对称化总是把 C 缩小, 把 C' 增大).

由于得出一联串的 C 是递降的数列, 因而有一极限 C_0, 一联串的 C' 是递增的数列, 因而有一极限 C_0', 如果 $C_0 \neq C_0'$, 则以上的方法还是可以做下去, 因此所得的极限是一个圆.

已经成为圆的对称化也还是它自己, 再检查任意 a, 这做法可使任意 $z = a$ 的截体都是圆.

但需要声明一下, 一系列凸体的极限还是凸体, 因而证明了: 存在着一个绕 z 轴的旋转体, 适合 (3) 式.

Brun-Minkowski 不等式

对一凸旋转体来说：$z=a$ 所截得的圆的半径是 $\rho(a)$, 面积是 $\pi\rho^2(a)=A(a)$, 因此

$$\sqrt{A(a)}=\sqrt{\pi}\rho(a)$$

是一个凸函数, 也就是有不等式

$$(1-\vartheta)\rho(a)+\vartheta\rho(b)\leqslant\rho((1-\vartheta)a+\vartheta b),\quad 0<\vartheta<1.$$

对 s 维来说, $x_s=a$ 所截下来的 $s-1$ 维体积以 $V(a)$ 表之, 则有不等式

$$\begin{aligned}&(1-\vartheta)V(a)^{\frac{1}{s-1}}+\vartheta V(b)^{\frac{1}{s-1}}\\ \leqslant&V((1-\vartheta)a+\vartheta b)^{\frac{1}{s-1}}\\ &(0<\vartheta<1)\end{aligned}$$

这是有名的 Brun-Minkowski 不等式 (见 Minkowski Geometrieder Zahlen, 数的几何).

另一个办法: 先证明了这个不等式, 然后以 a 为中心, 作一体积为 $V(a)$ 的 $s-1$ 维球. 当 a 依 z 轴移动, 则得出一个凸旋转体, 而凸旋转体适合于上节公式 (3) 所示的关系.

拉　直

主要定理　通过 s 维凸体 D 的重心的超平面把凸体分为两部分, 其体积之比为 M,

$$M\leqslant\frac{1-\left(\dfrac{s}{s+1}\right)^s}{\left(\dfrac{s}{s+1}\right)^s},\quad M\geqslant\frac{\left(\dfrac{s}{s+1}\right)^s}{1-\left(\dfrac{s}{s+1}\right)^s}.$$

事到如今, 这个定理的证明就不难了. 由前已知, 只要假定这个 s 维凸体是重心在平行于底的超平面 $x_s=0$ 上的绕 x_s 轴的旋转体, 作一个以 $x_s=0$ 交 D 的 $s-1$ 维球为底的 s 维锥体, 它的高 h 使这个锥体的力矩等于 D^+ 的力矩. 设这个锥体交 D 于 $x_s=l$, 由于 D 外锥内的点适合于 $x_s>l$, 而锥外 D^+ 内的点适合于 $x_s<l$, 因而锥体的体积不大于 D^+ 的体积, 把锥延展到下半空间, 使“台”体的力

矩等于 D^+ 的力矩, 同法证明“台”体的体积不小于 D^- 的体积, 因而

$$\frac{D^+\text{体积}}{D^-\text{体积}} \geqslant \frac{\text{锥体积}}{\text{“台”体积}} = \frac{\left(\dfrac{s}{s+1}\right)^s}{1-\left(\dfrac{s}{s+1}\right)^s}$$

即得所证.

说　　明

1) 这个方法有很大的优越性, 每次留下的部分不大于上次的

$$1-\left(\frac{s}{s+1}\right)^s$$

倍, 由于

$$\left(\frac{s}{s+1}\right)^s > \frac{1}{e},$$

所以留下的不大于上次的

$$1-\frac{1}{e}$$

倍, 这个数与 s 无关, 而每次要做 $s+1$ 个试验, 因而如果要求使留下的体积是原来的 $\frac{1}{m}$, 那末试验次数的数量级是

$$s\log m,$$

即使用体积是长度的 s 方计算, 也只要

$$s^2\log m$$

数量级的次数计算就够了, 这也就是一维的 s^2 倍.

2) 这方法有两个缺点, 一个是用差分

$$\frac{f(x_1+h,x_2,\cdots,x_n)-f(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{h}$$

代替微商, “小数除小数”, 这是计算数学中忌讳的, 必须小心在意.

另一方面除 $s=2$ 外, 重心的计算很复杂. 关于这一点可以求助于电子计算机, 通过求积分的近代方法, 问题可以化为球面上求积分来解决.

3) 问题的实质是: 凸体 D 中找一点 P, 过这点作一 $s-1$ 维平面 π, 把 D 分为两部分 $D^+(\pi,p), D^-(\pi,P)$, 其体积各为 $V^+(\pi,P)$, $V^-(\pi,P)$.

找 P 点使

$$\max_{\pi} \frac{V^+(\pi, P)}{V^-(\pi, P)}$$

最小.

这个 P 点是什么？是一个值得研究的问题

二次迴归法评介

述　要

以下介绍一个较简单, 较粗糙的方法, 虽然如此, 但比一般利用统计学上二次迴归求最大值的方法还可能好些.

方法是: 作两条平行线 l_1, l_2, 在这两条线上用单因素优选法各找出一取最大值的点 P_1, P_2, 通过这两点作一直线 m, 在 m 上取最大值的点 Q, 就作为优选点了, 所取的值就作为我们所要找的最大值.

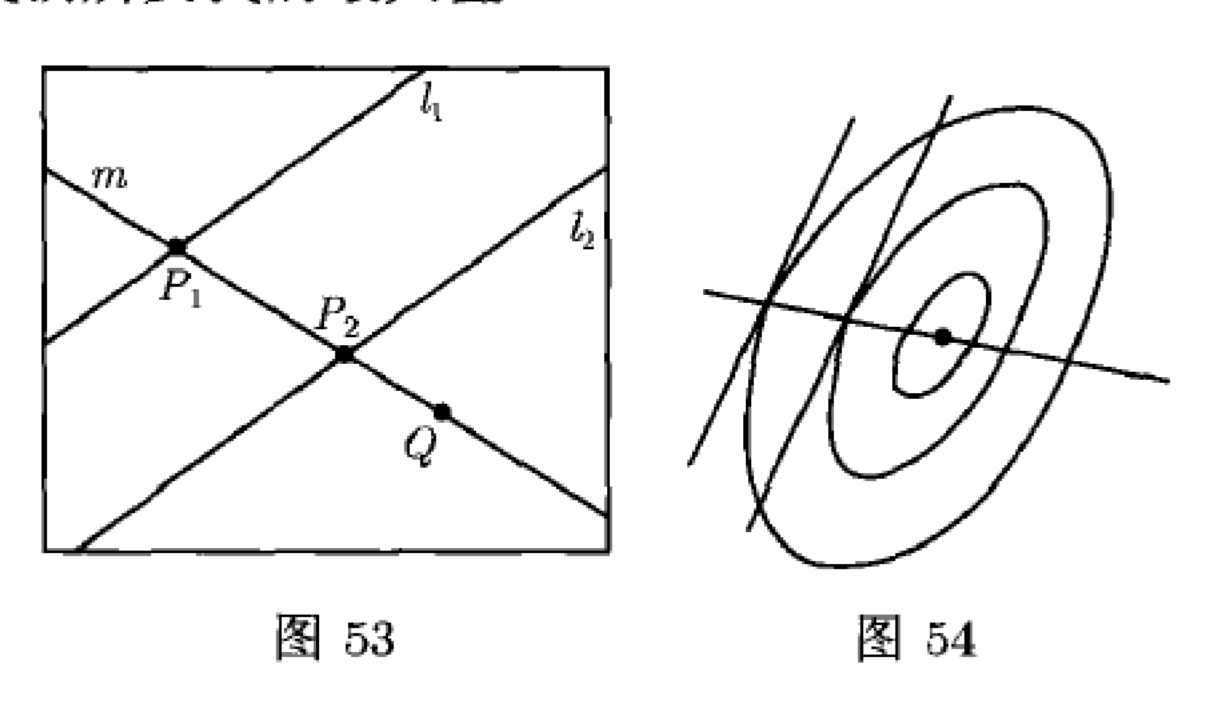


图 53　　图 54

这方法的局限性很大, 但还是有些启发.

背　景

正是从椭球的等高线图形 —— 一簇以制高点为中心的同心椭圆启发出了这个方法. 它的基础是: 两个同心椭圆的两条平行切线的切点联线一定通过中心.

其证明是: 假定中心在原点, 两个椭圆各为

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \lambda,$$
$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \mu,$$

这里

$$ac - b^2 \neq 0.$$

他们在 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 的切线各为

$$(ax_1 + by_1)x + (bx_1 + cy_1)y = \lambda,$$

$$(ax_2+by_2)x+(bx_2+cy_2)y=\mu.$$

如果他们平行, 则

$$\frac{ax_1+bv_1}{ax_2+by_2}=\frac{bx_1+cy_1}{bx_2+cy_2},$$

即

$$(ac-b^2)(x_1y_2-x_2y_1)=0.$$

由于 $ac-b^2\neq 0$, 所以

$$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2},$$

也就是 (x_1,y_1), (x_2,y_2), $(0,0)$ 在一直线上.

本章开始所讲的方法, 实质上是: P_1, P_2 是两个依中心放大的椭圆的切线的切点 (并不排斥两个椭圆重合的情况), 因而他们的联线通过中心. 中心既是这联线上取最大值的点, 也同时就是制高点了.

这些结果还可适当推广到稍为广一些的函数类. 假定

$\langle 1\rangle$ $$f(x,y)\leqslant 1$$

是一凸域, 并且适合

$\langle 2\rangle$ $$f(xt,yt)=t^pf(x,y).$$

上面例中的同心椭圆族属于这类函数, 又例如

$$f(x,y)=\sqrt[\alpha]{|x|^\alpha+|y|^\alpha}\quad(\alpha\geqslant 1).$$

满足上述条件 $\langle 1\rangle$ 及 $\langle 2\rangle$ 的 $z=f(x,y)$, 等高线由

$$f(x,y)=\lambda$$

所形成, 这是一批以原点为中心的凸曲线. 从中心出发的某一方向

$$x=t\cos\theta,\quad y=t\sin\vartheta$$

上的一点 $t=t_0$ 处, 曲线

$$f(x,y)=\lambda_0$$

$(\lambda_0=t_0^pf(\cos\theta,\sin\vartheta))$ 的切线斜率是

$$-\frac{\partial f}{\partial x}\Big/\frac{\partial f}{\partial y}=-\left(\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)\Big/$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)=-[p\cos\theta f(\cos\theta,\sin\theta)$$

$$-\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}f(\cos\theta,\sin\theta)]\Big/[p\sin\theta f(\cos\theta,\sin\theta)$$
$$+\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}f(\cos\theta,\sin\theta)].$$

这是与 t 无关的, 也就是在这一方向的任何一点上等高线的切线都是平行的, 这是上面讨论的一个推广.

二 次 迴 归

这个方法的限制性是极大的, 但与统计学上二次迴归的方法比较, 并不见得差. 下面介绍一下统计学上的二次迴归.

我们预先假定所考虑的问题合乎二次模型, 也就是假定"z 是 x,y 的二次式", 即

$$z-z^*=A(x-x^*)^2+2B(x-x^*)(y-y^*)+C(y-y^*)^2 \tag{1}$$

x^*, y^*, z^*, A, B, C 是六个待定常数. 如果我们在六个点上作了试验, 得出六组 $x_i,y_i,z_i(i=1,2,\cdots,6)$, 六个待定常数就可以确定.

统计学者把试验中可能有误差的因素也考虑进去, 他们试验 m 次, 在 (x_i,y_i) 处试验出 $z_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 来, 然后求 A, B, C, x^*, y^*, z^*, 使误差平方和

$$\varPhi=\sum_{i=1}^{m}[z_i-z^*-A(x_i-x^*)^2-2B(x_i-x^*)(y_i-y^*)-C(y_i-y^*)^2]^2$$

最小.

由 (1) 可知, 如果 $A<0$, 且 $AC<B^2$, 则显而易见在 $x=x^*$, $y=y^*$ 处, z 取最大值 z^*.

这个方法的计算比较麻烦, 而且一开始就来了一个限制很强的数学模型 (1) 这一假定.

这模型的等高线是以 (x^*,y^*) 为相似中心的椭圆族, 反之, 等高线有相似椭圆族性质的曲面不一定是 (1) 的形式, 因而, 本章所研究的方法虽然特殊, 但比二次迴归还较一般些.

预定数学模型是二次的, 这的确是一个极为大胆的设想, 它很少可能符合客观事实的, 但是当接近最优解时, 也就是 $x-x^*$, $y-y^*$ 充分小时, 我们略去高次项, 不妨就用 $x-x^*$, $y-y^*$ 的二次式来代替 z, 而这正是难以辨别好坏的时候.

s 个因素的问题

先讨论三个因素的情形:

开始取二个平行平面, 在其中一个平面 π_1 用上面的方法, 求三条直线上的最大值, 得出在这平面上取最大值的点. 在另一个平面 π_2 就不需做三条直线上的优选法了, 因为前一平面已定出了二个共轭方向 l_1 与 l_3. 我们在平面 π_2 上取一条平行于 l_1 的直线 l_1', 在其上优选的最好点 P_1', 过 P_1' 作平行于 l_3 的直线 l_3', 在其上优选得最好点 P_2', 则 P_2' 便是平面 π_2 上的最好点了. 再在连结 P_2' 与 π_1 上最好点 P_2 的直线上优选, 便得出所求的最好点 P_0 来.

因而三个因素时, 总共做了 $3+2+1=6$ 批单因素的优选试验, 然后得出最大值.

我们很容易用归纳法证明, s 个因素需要做

$$\frac{s(s+1)}{2}$$

批单因素的试验.

如果单因素的试验用黄金分割法去做, 次数的数量级仍然是 $\log\frac{1}{\varepsilon}$, 现在只是前面加上一个 $\frac{s(s+1)}{2}$ 的因子.

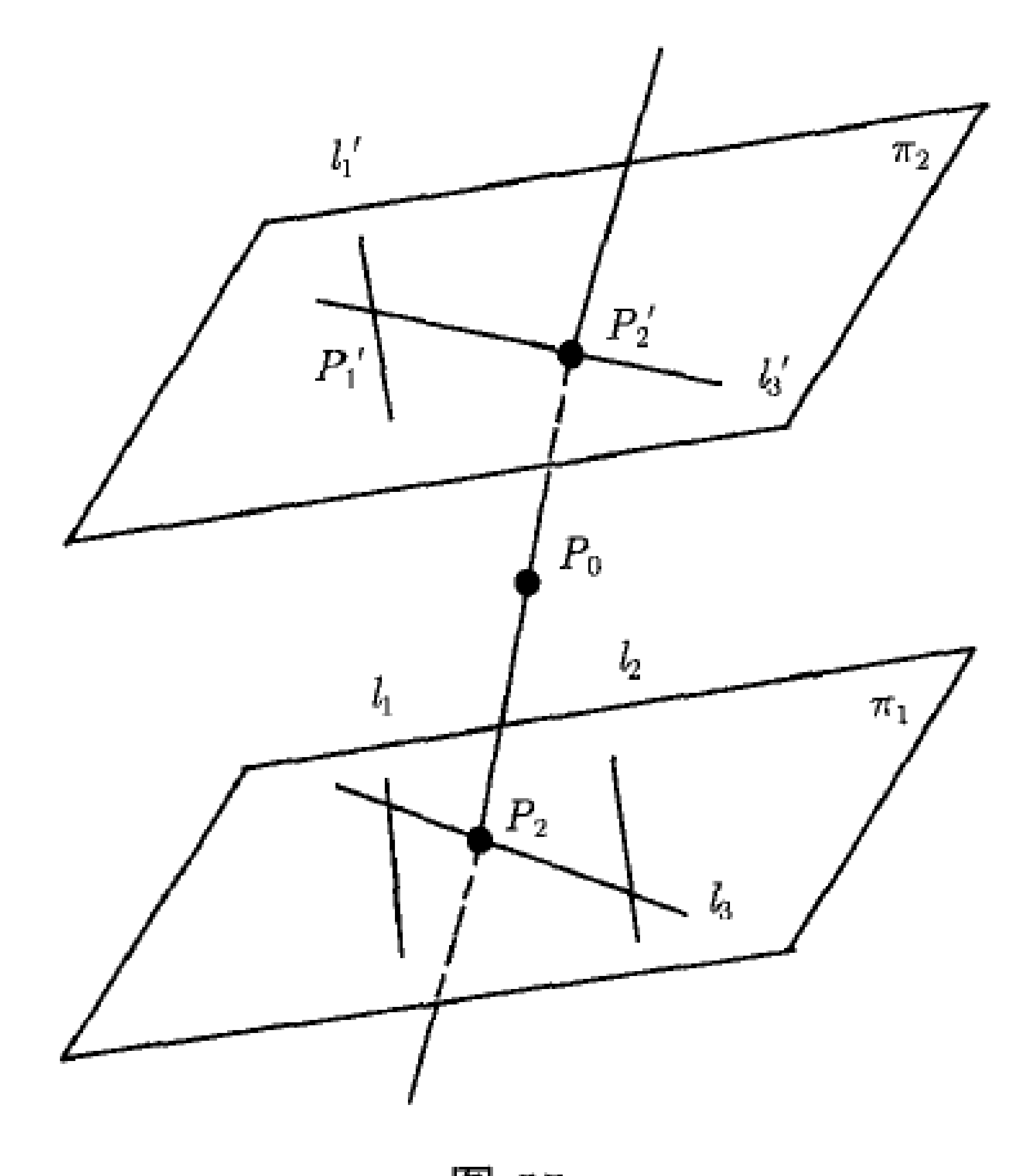


图 55

讨　论

虽然屡次指出了这方法的局限性, 但这个方法本身还是有所启发的.

首先, 因子 2^s-1 实在太大, 我们可以考虑以下的方法:

从一点 (x_1,y_1) 出发, 联系切块法的思想, 作一最陡上升的方向

$$\left(x_1+\frac{f(x_1+h,y_1)-f(x_1,y_1)}{h}t, y_1+\frac{f(x_1,y_1+k)-f(x_1,y_1)}{k}\right).$$

垂直这个方向作一直线 l_2 在 l_2 上行单因素优选, 得一点 (x_2,y_2), 再在 (x_1,y_1), (x_2,y_2) 的联线上找最优点 R.

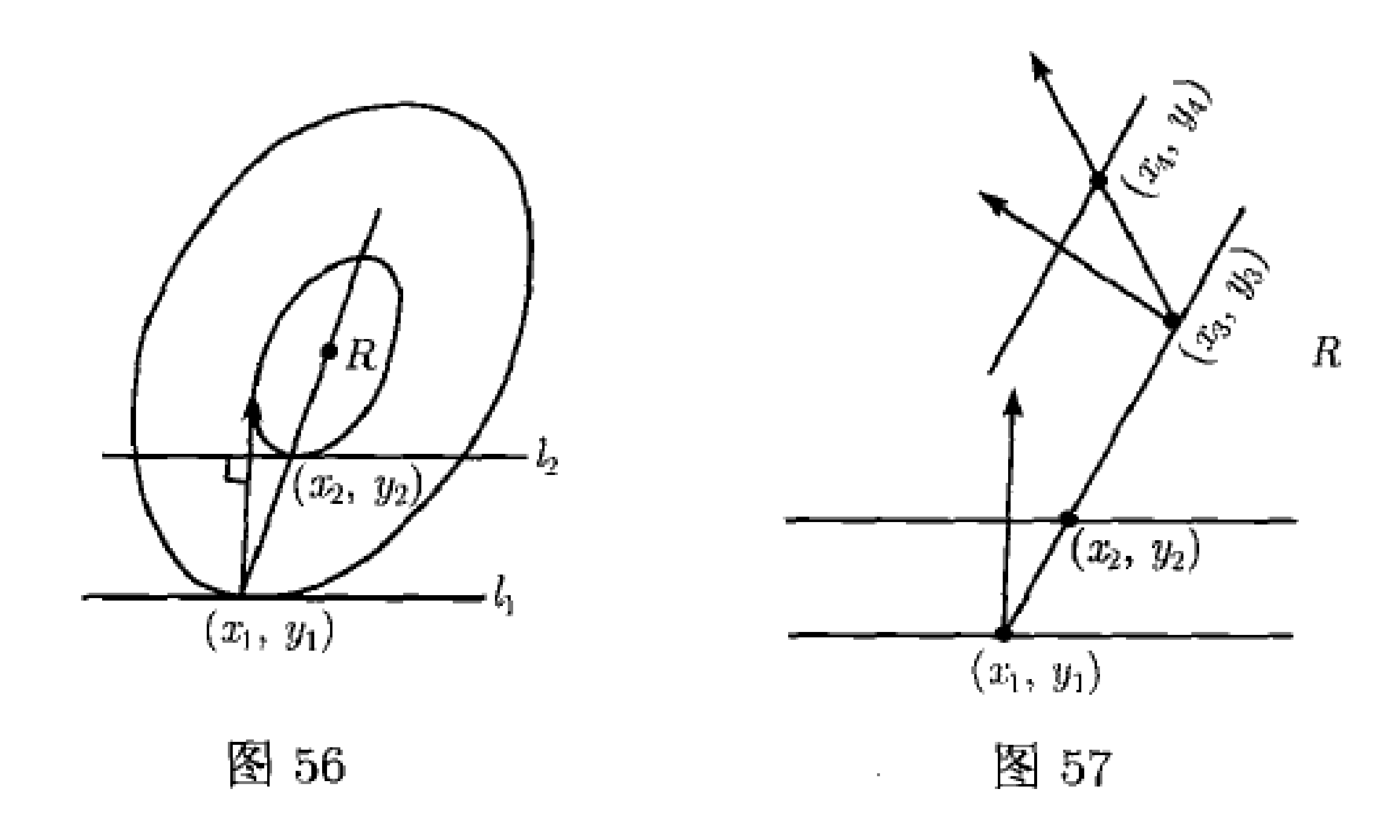


图 56　　　　图 57

这方法推广到 s 个因素, 只要 s 个单因素优选法就行了.

其次, 我们并不拿 R 作为最后数据, 而作为再一次的开始, 用这办法来逐步逼近最优解.

其三, 改变迴旋上升法.

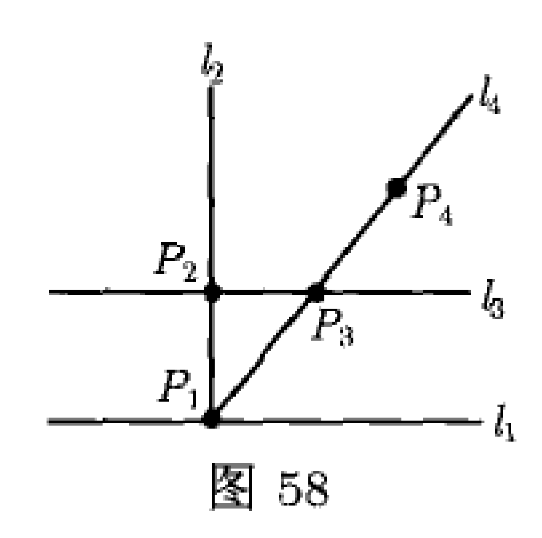


图 58

在一直线 l_1 上找到一最优点 P_1, 通过 P_1 作垂线 l_2, 在这垂线上用单因素法找到另一点 P_2, 过 P_2 作 l_2 的垂法 l_3, 在 l_3 上又找到点 P_3, 接下去, 不作 l_3 的垂线了, 由于 P_1, P_3 是两等高线的平行切线的切点, 因而联 P_1, P_3, 在这直线 l_4 上找最优点 P_4, 过 P_4 作 l_4 的垂线 l_5 等等.

从多因素优选法可以看出, 随着维数 s 的增加试验次数很快地增加, 所以我们切不要因素愈多愈好而轻易地增加变量, 而应当抓住主要矛盾, 先集中少数几个因素来做试验. 这种突出主要矛盾的方法可以大大减少工作量. 当主要矛盾解决之后, 另一个矛盾上升为主要矛盾时, 我们再用同样的方法处理.

抛物体法

述　要

单因素抛物线法是利用三点的数据作出一抛物线, 以达到此物线最大值的点作为新的试点, 这方法所需次数的数量级是

$$\log\log\frac{1}{\varepsilon}.$$

把抛物线法的想法推广到多因素, 便得出抛物体法.

以二个因素为例, 根据在 $P_i(x_i, y_i)(i = 1, 2, \cdots, 6)$ 点上的试验结果, 可以确定一抛物面

$$z = F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f.$$

求出此抛物面的顶点 (x^*, y^*, z^*), 然后在 (x^*, y^*) 作试验, 与 P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 的结果一起又可构成新的抛物面, $\cdots$. 这样不断叠代.

我们将证明, 当满足一定的条件时, 这方法收敛速度是相当快的. 在 s 个因素的情形下所需次数的数量级仅为

$$s^2\log\log\frac{1}{\varepsilon}.$$

矩阵符号

为了便于讲述本章的方法, 我们引用矩阵符号, 以 $A = A^{(l,m)}$ 表 l 行 m 列的矩阵:

$$A = A^{(l,m)} = (a_{ij}) \quad (1 \leqslant i \leqslant l, 1 \leqslant j \leqslant m). \tag{1}$$

向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 可以看成为一行 n 列的矩阵 $x^{(1,n)}$. 我们常用 A' 表示由 A 经过行列互换所得的矩阵, 它是 m 行 l 列的.

定义　我们称

$$\|A\| = \sum_{1\leqslant i\leqslant l}\sum_{1\leqslant j\leqslant m}|a_{ij}| \tag{2}$$

为矩阵 A 的模. 特别对于一个向量 $\boldsymbol{x}$, 我们用 $\|\boldsymbol{x}\|$ 表示它的各个分量绝对值之和. 这样定义的模显然有以下的性质:

$$\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|; \tag{3}$$

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|. \tag{4}$$

当然, 这些式子, 只当 $A+B$, AB 有定义时才有意义.

引理 1 命 $X = X^{(n,s)}$, $A = A^{(s,s)}$, 若

$$\|A\| \leqslant \alpha < 1, \tag{5}$$

则

$$\|X(I-A)^{-1}\| \leqslant 1/(1-\alpha)\|X\|. \tag{6}$$

证明 我们有

$$X(I-A)^{-1} = X(I+A+A^2+\cdots),$$

由 (3) 及 (4) 可知

$$\|X(I-A)^{-1}\| \leqslant \|X\|+\|XA\|+\|XA^2\|+\cdots \leqslant \|X\|(1+\alpha+\alpha^2+\cdots) = 1/(1-\alpha)\|X\|.$$

方法的背景

我们的问题是: 求 s 个变数 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_s)$ 的函数 $\varphi(x)$ 的最大值.

在 $\frac{1}{2}(s+1)(s+2)$ 个点

$$\begin{aligned}&x^{(0)},\\&x^{(0)}+\eta e_i \quad (1\leqslant i\leqslant s),\\&x^{(0)}+\eta(e_i+e_j) \quad (1\leqslant i\leqslant j\leqslant s)\end{aligned} \tag{1}$$

上各做一次试验, 此处

$$e_i = (\underbrace{0,\cdots,0}_{i-1\text{个}},1,0,\cdots,0),$$

得出 $\frac{1}{2}(s+1)(s+2)$ 个数据:

$$\varphi(x^{(0)}), \quad \varphi(x^{(0)}+\eta e_i), \quad \varphi(x^{(0)}+\eta(e_i+e_j)). \tag{2}$$

我们现在找一个二次式

$$\psi(x) = \alpha + 2bx' + xCx', \tag{3}$$

其中 $\alpha=\alpha^{(1,1)}$, $b=b^{(1,s)}$, $C=C'=C^{(s,s)}$ 为一定负矩阵, 使在 (1) 中各点上有

$$\psi(x)=\varphi(x) \tag{4}$$

成立, 现在总共有 $\frac{1}{2}(s+1)(s+2)$ 个方程, 由此可以定出 $\frac{1}{2}(s+1)(s+2)$ 个未知量 α,b,C.

令

$$\Delta_i f(x)=\frac{1}{\eta}[f(x+\eta e_i)-f(x)], \tag{5}$$

则

$$\begin{aligned}\Delta_i\varphi(x^{(0)})=&\Delta_i\varphi(x^{(0)})=\frac{1}{\eta}[2b(x^{(0)}+\eta e_i)'-2b(x^{(0)})'\\&+(x^{(0)}+\eta e_i)C(x^{(0)}+\eta e_i)'-x^{(0)}Cx^{(0)\prime}]\\=&2be_i'+2x^{(0)}Ce_i'+\eta e_iCe_i',\end{aligned} \tag{6}$$

及

$$\Delta_i\Delta_i\varphi(x^{(0)})=2e_iCe_j'. \tag{7}$$

由 (7) 得出

$$C=\frac{1}{2}(\Delta_i\Delta_j\varphi(x^{(0)}))_{1\leqslant i,j\leqslant s}. \tag{8}$$

由 (6) 得出

$$\begin{aligned}&(\Delta,\varphi(x^{(0)}),\cdots,\Delta_s\varphi(x^{(0)}))=2b+2x^{(0)}C\\&+\frac{1}{2}\eta(\Delta_1^2\varphi(x^{(0)}),\cdots,\Delta_s^2\varphi(x^{(0)}))\end{aligned}$$

即得

$$\begin{aligned}2b=&\Big(\Delta_1\varphi(x^{(0)})-\frac{1}{2}\eta\Delta_1^2\varphi(x^{(0)}),\cdots,\\&\Delta_s\varphi(x^{(0)})-\frac{1}{2}\eta\Delta_s^2\varphi(x^{(0)})\Big)-2x^{(0)}C.\end{aligned} \tag{9}$$

再由于 C 是定负的, 及

$$\psi(x)=\alpha-bC^{-1}b'+(x+bC^{-1})C(x+bC^{-1})',$$

所以当

$$x=x^{(1)}=-bC^{-1}$$

时, $\psi(x)$ 取最大值, 因此

$$x^{(1)}=x^{(0)}-V(x^{(0)})M(x^{(0)})^{-1}, \tag{10}$$

这里

$$\begin{aligned}V(x^{(0)})=&\Big(\Delta_1\varphi(x^{(0)})-\frac{1}{2}\eta\Delta_1^2\varphi(x^{(0)}),\cdots,\\&\Delta_s\varphi(x^{(0)})-\frac{1}{2}\eta\Delta_s^2\varphi(x^{(0)})\Big),\\M(x^{(0)})=&(\Delta_i\Delta_j\varphi(x^{(0)}))_{1\leqslant i,j\leqslant s}.\end{aligned}$$

我们的方法是利用递归公式

$$x^{(v+1)}=x^{(v)}-V(x^{(v)})M(x^{(v)})^{-1} \tag{11}$$

来逐步逼近 $\varphi(x)$ 的最大值, 此处

$$\begin{aligned}V(x^{(v)})=&\Big(\Delta_1\varphi(x^{(v)})-\frac{1}{2}\eta\Delta_1^2\varphi(x^{(v)}),\cdots,\\&\Delta_s\varphi(x^{(v)})-\frac{1}{2}\eta\Delta_s^2\varphi(x^{(v)})\Big),\end{aligned} \tag{12}$$

及

$$M(x^{(v)})=(\Delta_i\Delta_j\varphi(x^{(v)}))_{1\leqslant i,j\leqslant s}. \tag{13}$$

假定这最大值在 $x=x^*$ 处取, 则

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x)|_{x=x^*}=0\quad(i=1,2,\cdots,s). \tag{14}$$

为简单起见, 以后把 $\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x)$ 记作 φ_{x_i}.

在证明这方法的有效性时, 我们要用到下节两条定理.

两 条 定 理

定理 1　如果

$$\sum_{i=1}^{s}|\varphi_{x_ix_jx_k}|\leqslant K,\quad\sum_{i=1}^{s}|\varphi_{x_i^2x_k}|\leqslant K, \tag{15}$$

则

$$\|x^{(v+1)}-x^{(v)}\|\leqslant\frac{1}{2}K(\|x^{(v-1)}-x^{(v)}\|^2+2\eta\|x^{(v-1)}-x^{(v)}\|)\|M(x^{(v)})^{-1}\|. \tag{16}$$

证　由 (11) 式得

$$(x^{(v+1)}-x^{(v)})M(x^{(v)})=-V(x^{(v)}),$$
$$(x^{(v)}-x^{(v-1)})M(x^{(v-1)})=-V(x^{(v-1)}),$$

因此得

$$(x^{(v+1)}-x^{(v)})M(x^{(v)})=V(x^{(v-1)})-V(x^{(v)})+(x^{(v)}-x^{(v-1)})M(x^{(v-1)}). \tag{17}$$

注意到

$$\begin{aligned} f(x^{(\mu)})-f(x^{(v)}) &= \int_0^1 \frac{d}{d\alpha}f(x^{(v)}+\alpha(x^{(\mu)}-x^{(v)}))d\alpha \\ &= \sum_{k=1}^{s}(x_k^{(\mu)}-x_k^{(v)})\int_0^1 f_{x_k}(x^{(v)}+\alpha(x^{(\mu)}-x^{(v)}))d\alpha, \end{aligned} \tag{18}$$

及

$$\Delta_i f(x^{(v)})=\int_0^1 f_{x_i}(x^{(v)}-\alpha e_i\eta)d\alpha \tag{19}$$

(17) 式右边矢量的第 i 个分量是

$$\begin{aligned} &\left(\Delta_i-\frac{1}{2}\eta\Delta_i^2\right)\left(\varphi(x^{(v-1)})-\varphi(x^{(v)})\right)+\sum_{k=1}^{s}(x_k^{(v)}-x_k^{(v-1)})\Delta_k\Delta_i\varphi(x^{(v-)}) \\ =&\sum_{k=1}^{s}(x_k^{(v-1)}-x_k^{2(v)})\Big\{\left(\Delta_i-\frac{1}{2}\eta\Delta_i^2\right)\int_0^1\varphi_{x_k}(x^{(v)}+\alpha(x^{(v-1)}-x^{(v)}))d\alpha \\ &-\Delta_i\int_0^1\varphi_{x_k}(x^{(v-1)}+\alpha\eta e_k)d\alpha\Big\} \\ =&\sum_{k=1}^{s}(x_k^{(v-1)}-x_k^{(v)})\Big\{\int_0^1\int_0^1\varphi_{x_kx_i}(x^{(v)}+\alpha(x^{(v-1)}-x^{(v)})+\beta\eta e_i)d\alpha d\beta \\ &-\frac{1}{2}\eta\int_0^1\int_0^1\int_0^1\varphi_{x_i^2x_k}(x^{(v)}+\alpha(x^{(v-1)}-x^{(v)})+\beta\eta e_i+\gamma\eta e_i)d\alpha d\beta d\gamma \\ &-\int_0^1\int_0^1\varphi_{x_kx_i}(x^{(v-1)}+2\eta e_k+\beta\eta e_i)d\alpha d\beta\Big\} \\ =&\sum_{k=1}^{s}(x_k^{(v-1)}-x_k^{(v)})\Big\{\sum_{l=1}^{s}\int_0^1\int_0^1\int_0^1[(1-\alpha)(x_l^{(v)}-x_l^{(v-1)})-\alpha\eta\delta_{kl}]\varphi_{x_kx_ix_l}[x^{(v-1)} \\ &+\alpha\eta e_k+\beta\eta e_i+\gamma((1-\alpha)(x^{(v)}-x^{(v-1)})-\alpha\eta e_k)]d\alpha d\beta d\gamma \\ &-\frac{1}{2}\eta\int_0^1\int_0^1\int_0^1\varphi_{x_i^2x_k}(x^{(v)}+\alpha(x^{(v-1)}-x^{(v)})+\beta\eta e_i+\gamma\eta e_i)d\alpha d\beta d\gamma\Big\}, \end{aligned}$$

其中 $\delta_{kl}=\begin{cases}0 & k\neq l,\\ 1 & k=l.\end{cases}$ 由假定 (15), 可知

$$\begin{aligned}&\|x^{(v+1)}-x^{(v)}\|\leqslant\|x^{(v+1)}-x^{(v)}\|\cdot\Big\{K\|x^{(v)}-x^{(v-1)}\|\\&\cdot\int_0^1\int_0^1\int_0^1(1-\alpha)d\alpha d\beta d\gamma+\eta\overline{K}\int_0^1\int_0^1\int_0^1\alpha d\alpha d\beta d\gamma\\&+\frac{1}{2}\eta K\int_0^1\int_0^1\int_0^1 d\alpha d\beta d\gamma\Big\}\|M(x^{(v)})^{-1}\|\\&=\frac{K}{2}(\|x^{(v-1)}-x^{(v)}\|^2+2\eta\|z^{(v-1)}-x^{(v)}\|)\|M(x^{(v)})^{-1}\|.\end{aligned}$$

这就是 (16) 式.

定理 2　如果

$$\sum_{i=1}^{s}|\varphi_{x_ix_jx_k}|\leqslant K,$$

及

$$K\|x^{(v)}-x^{(v-1)}\|\cdot\|M(x^{(v-1)})^{-1}\|\leqslant\alpha_{v-1}\leqslant 1,\tag{20}$$

则

$$\|M(x^{(v)})^{-1}\|\leqslant\frac{1}{1-\alpha_{v-1}}\|M(x^{(v-1)})^{-1}\|.\tag{21}$$

证　命

$$M(x^{(v)})-M(x^{(v-1)})=(p_{ij}),$$
$$M(x^{(v-1)})^{-1}=(q_{ij}),$$

则

$$\begin{aligned}p_{ij}&=\Delta_i\Delta_j(\varphi(x^{(v)})-\varphi(x^{(v-1)}))\\&=\Delta_i\Delta_j\int_0^1\frac{d}{d\alpha}\varphi[x^{(v-1)}+\alpha(x^{(v)}-x^{(v-1)})]d\alpha\\&=\sum_{k=1}^{s}(x_k^{(v)}-x_k^{(v-1)})\Delta_i\Delta_j\cdot\int_0^1\varphi_{x_k}(x^{(v-1)}+\alpha(x^{(v)}-x^{(v-1)}))d\alpha,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\|I-M(x^{(v)})M(x^{(v-1)})^{-1}\|&\leqslant\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}|p_{ij}|\cdot|q_{jk}|\\&\leqslant\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}\sum_{l=1}^{s}|x_k^{(v)}-x_k^{(v-1)}|\end{aligned}$$

$$\cdot \int_0^1 |\Delta_i \Delta_j \varphi_{x_k}(x^{(v-1)} + \alpha(x^{(v)} - x^{(x-1)}))| d\alpha \cdot |q_{jl}|$$
$$\leqslant K\|x^{(v)} - x^{(v-1)}\| \cdot \|M(x^{(v-1)})^{-1}\|. \tag{22}$$

命

$$I - M(x^{(v)})M(x^{(v-1)})^{-1} = A. \tag{23}$$

则

$$M(x^{(v)})^{-1} = M(x^{(v-1)})^{-1}(I-A)^{-1},$$

由假定 (20) 及引理 1 得出本定理.

有 效 性

定理 3 如果

$$K\|x^{(1)} - x^{(0)}\|\|M(x^{(0)})^{-1}\| \leqslant \alpha < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$
$$(= 0.382\cdots), \tag{24}$$
$$\|x^{(v)} - x^{(v-1)}\| \geqslant 2\eta, \tag{25}$$

则

$$\|x^{(v+1)} - x^{(v)}\| \leqslant \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\alpha_0\right)^{2v-1} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^v \|x^{(1)} - x^{(0)}\|. \tag{26}$$

证 1) 由定理 1, 2 及 (25) 可知

$$K\|x^{(v+1)} - x^{(v)}\|\|M(x^{(v)})^{-1}\| \leqslant (K\|x^{(v)} - x^{(v-1)}\|\|M(x^{(v)})^{-1}\|)^2 \leqslant \left(\frac{\alpha_{v-1}}{1-\alpha_{v-1}}\right)^2 = \alpha_v.$$

现在用归纳法证明

$$0 < \alpha_v < \frac{3-\sqrt{5}}{2}. \tag{27}$$

由于 $f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^2$ 是 x 的递增函数 $(0 < x < 1)$, 所以对于不大于 $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 的 x 可有

$$f(x) \leqslant f\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \Big/ \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)^2$$
$$= \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \Big/ \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

于是 (27) 得证.

2) 由定理 2, 可知

$$\begin{aligned}\|M(x^{(v)})^{-1}\| &\leqslant \frac{1}{1-\alpha_{v-1}}\|M(x^{(v-1)})^{-1}\| \\ &\leqslant \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\|M(x^{(v-1)})^{-1}\| \\ &\leqslant \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{v}\|M(x^{(0)})^{-1}\|. \end{aligned}\tag{28}$$

再用归纳法证明 (26) 式. 当 $v=0$, 此式显然成立, 由定理 1,

$$\begin{aligned}\|x^{(v+1)}-x^{(v)}\| \leqslant& K\|x^{(v)}-x^{(v-1)}\|^2\|M(x^{(v)})^{-1}\| \\ \leqslant& K\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\alpha_0\right)^{v-1}\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{v-1}\cdot\|x^{(1)}-x^{(0)}\|\right]^2 \\ &\cdot\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{v}\|M(x^{(0)})^{-1}\| \leqslant \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\alpha_0\right)^{2v-2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2v-2} \\ &\cdot\|x^{(1)}-x^{(0)}\|\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{v}\alpha_0.\end{aligned}$$

由于

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{-2}=1$$

即得 (26) 式

定理 3 说明, 一旦找到一个初始值适合于条件 (24) 之后, 我们这个方法进行得是非常迅速的, 其收敛因子是

$$\left(\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})\alpha_0\right)^{2v-1}\left(\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\right)^{v}.$$

第一个是主要的, 第二个因子和黄金分割法差不多好, 而且维数增加, 试验次数只增加 s^2 倍, 而不是 s 次方, 如果取

$$\alpha_0=\sqrt{5}-2 \text{ 则 } \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\alpha_0\right)^{2v-1}=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2v-1}.$$

当

$$v=\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}-\log\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\Big/\log 2$$

时, 就可以使

$$\|x^{(v+1)}-x^{(v)}\| \leqslant \varepsilon\|x^{(1)}-x^{(0)}\|.$$

注意：在

$$\|x^{(v)}-x^{(v-1)}\|<2\eta$$

时, 我们停止做下去, 此时, 我们已经尽可能地达到 x^* 的渐近值了.

附记 也许有人提出条件 (24) 不易验证. 我们的建议先用其他方法做到相当程度后, 再用此法, 在用此法时, 如果试验出的 $\varphi(x^{(1)})$ 比 $\varphi(x^{(0)})$ 大, 则照样做下去. 当 $\varphi(x^{(1)})$ 不比 $\varphi(x^{(0)})$ 大时, 可以与切块法同时考虑, 因为在 $x^{(0)}$, $x^{(0)}+\eta l_i$, $x^0+\eta(l_i+l_j)$ 做了实验, 可以来检查, $x^{(0)}$, $x^{(0)}+\eta l_i((s+1)$个点) 的上升方向, 而另外 $(s+1)$ 个点, $x^{(1)}$, $x^{(0)}+\eta l_i$ 又有了 $s+1$ 个新方向, 根据这些线索可以得出较小的区域, 但有一点理论上是肯定的, 充分多次之后, 这方法便一帆风顺了.

补充方法

在多变数时, 以下的简单方法也能起到好的作用. 我们用叠代公式

(1) $x^{(v+1)}=x^{(v)}-u(x^{(v)})M(x^{(0)})^{-1}$, $(v=1,2,\cdots)$

也就是 $M(x^{(0)})^{-1}$ 并不变化, $V(x)$ 代以更简单的

$$u=(u_1,u_2,\cdots,u_s), u_i=u_i(x)=\Delta_i\varphi(x), \quad (i=1,2,\cdots,s).$$

类似于前述, 容易证明这时有

$$\|x^{(v+1)}-x^{(v)}\| \leqslant K\|x^{(v)}-x^{(v-1)}\|\left(\|x^{(v)}-x^{(0)}\|+\frac{1}{2}\|2^{(v)}-2^{(v-1)}\|+\frac{\eta}{2}\right)\cdot\|M(x_0)^{-1}\|.$$

为了便于比较, 我们略去了 η, 又记 x^* 为制高点.

概括地说, 抛物体法每次要做

$$\frac{1}{2}(s+1)(s+2)$$

个实验来定出

$$\varphi(x_0),\varphi(x_0+\eta l_i),\varphi(x_0+\eta l_i+\eta l_j)(1\leqslant i\leqslant j\leqslant s)$$

的数据, 而收敛情形是二次的, 也不难证明

$$\|x^{(v+1)}-x^*\| \ll \|x^{(v)}-x^*\|^2,$$

这就是说, 收敛指数成倍地增长着.

补充方法是每次做 $s+1$ 个实验来定出

$$\varphi(x), \quad \varphi(x+\eta l_i) \quad (1 \leqslant i \leqslant s)$$

的数据, 但收敛情形是

$$\|x^{(v+1)} - x^2\| \ll \|x^{(v)} - x^*\| \|x^{(0)} - x^*\|$$

即收敛指数上升一阶.

与计算数学的关系

问题的叙述

如果 $f(x,y)$ 是一个有了表达式的函数, 则求

$$z = f(x,y)$$

的最大值的计算问题, 和我们所讨论的问题一样, 但 "试验" 已经可以更具体地理解为 "给了 x, y 的数值, 通过计算得出 z 的数值". 由于近代电子计算机速度很快, 因而多做些 "试验" 是完全可能的. 如果计算一个 z 的数值需要一千次, 在每秒十万次的计算机上只不过 1/100 秒的时间而已. 但如果我们的 x, y 各要求算四位, 且对每一对 (x,y) 算一个 z, 需运算千次, 然后比较出最大值, 这样总共的计算次数就是

$$10^4 \times 10^4 \times 10^3 = 10^{11},$$

即一千亿次, 这样每秒十万次的电子计算机还要计算三百个工作小时, 太多了!

如果变数多了, 增长率更快, 电子计算机虽快, 但还是不能胜任.

工作可考虑分两方面来进行, 一方面搞电子计算机的往加快速度方面努力, 使每秒钟的运算次数愈多愈好, 愈可靠愈好, 另一方面搞计算的, 从减少计算次数方面努力, 想方设法来减少计算次数.

前面各章所介绍的优选法, 实质上也就是求最大值 (或最小值) 的快速计算法. 实际上不仅如此, 很多计算问题, 都可以化为极值问题来解决, 而极值问题离散化后, 就与本书所讲的方法有关了, 因而优选法在计算数学上也有其重要性.

例 解超越联立方程

$$f(x,y) = 0, \quad g(x,y) = 0,$$

可以化为求函数

$$F(x,y) = f^2 + g^2$$

的最小值的问题.

所以, 我们不能把优选法简单地理解为一个减少试验次数的方法. 实际上, 这个方法给计算数学也增添了内容.

黄金分割法的计算格式

求方程,

$$y = f(x) = 0$$

的解. 假定在 (a, b) 中仅有一解 (或本法仅能找出其诸解之一), 计算步骤如下:

1) 写下 $a, b, w = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.6180339887$;

2) 编出计算 $|f(x)|$ 的程序;

3) 算出

$$p = a + w(b-a), \quad q = b - w(b-a);$$

4) 依 2) 算出 $|f(p)|, |f(q)|$;

5) 如果在合乎要求的精密度下 $|f(p)| = 0$, 则停机并打出 p 的数值, 同样处理 $|f(q)|$;

6) 如果不合于 5) 的情形, 则比较 $|f(p)|$ 与 $|f(q)|$ 的大小, 如果 $|f(p)| \geqslant |f(q)|$, 则取 $a_1 = a, b_1 = p$; 如果 $|f(p)| < f(q)$, 则取 $a_1 = q, b_1 = b$;

7) 如果 $b_1 - a_1$ 合乎要求, 则停机打出 a_1, b_1 及 $|f(a_1)|, |f(b_1)|$;

8) 不然, 回到原来的程序, 但以 a_1, b_1 代替 a, b.

注意: 如果在 5) 停机, 我们找到了近似解. 如果在 7) 停机, 而 $|f(a_1)|$ 不是合乎要求地小, 我们可以得出结论: 不是问题在 (a_1, b_1) 中无解, 就是机器出了毛病. 从 $|f(a_n)|$ 与 $|f(a_{n-1})|$ 的大小, 可以来纠正错误.

如果 $f(x) = 0$ 不止一个解, 但能估计出每个解所在的范围, 用上法可找出所有的解.

对 开 法

对开法的程序也不复杂, 我们可以用来解联立方程

$$f(x, y) = 0, \quad g(x, y) = 0.$$

假定在

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d$$

的范围内有一个解.

1) 用黄金分割法算出

$$F\left(x, \frac{1}{2}(c+d)\right) = \left|f\left(x, \frac{1}{2}(c+d)\right)\right|^2 + \left|g\left(x, \frac{1}{2}(c+d)\right)\right|^2, \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

的最小值 p, 在 $x = x_1$ 处取这值. 如果在乎要求的精密度下, $p = 0$, 则停机打出 $x_1, \frac{1}{2}(c+d)$;

2) 同法算出在 $\left(\frac{1}{2}(a+b), y_1\right)$ 处$F\left(\frac{1}{2}(a+b), y\right)$ 取最小值 q, 如果 q 也合乎精密度且 $q=0$, 则停机打出 $\frac{1}{2}(a+b), y_1$;

3) 分四种情形

当 $p \geqslant q, y_1 > \frac{1}{2}(c+d)$ 时, 取

$$a_1 = a, \quad b_1 = b, \quad c_1 = \frac{1}{2}(c+d), \quad d_1 = d;$$

当 $p \geqslant q, y_1 < \frac{1}{2}(c+d)$ 时, 取

$$a_1 = a, \quad b_1 = b, \quad c_1 = c, \quad d_1 = \frac{1}{2}(c+d);$$

当 $p < q, x_1 > \frac{1}{2}(a+b)$ 时, 取

$$a_1 = \frac{1}{2}(a+b), \quad b_1 = b, \quad c_1 = c, \quad d_1 = d;$$

当 $p < q, x_1 < \frac{1}{2}(a+b)$ 时, 取

$$a_1 = a, \quad b_1 = \frac{1}{2}(a+b), \quad c_1 = c, \quad d_1 = d;$$

4) 以 a_1, b_1, c_1, d_1 代替 a, b, c, d, 重新开始.

附记 $y_1 = \frac{1}{2}(c+d)$ 时, p 不能大于 q, 因为在 $y = \frac{1}{2}(c+d)$ 上不可能取比 p 更小的数值 q, 因而本法仅在$p = q, x_1 = \frac{1}{2}(a+b), y_1 = \frac{1}{2}(c+d)$ 时失效, 也就是无论横向或纵向, $F(x,y)$ 都在 $\left(\frac{1}{2}(a+b), \frac{1}{2}(c+d)\right)$ 处取最小值, 为了避免这一情况, 我们在 2) 后 3) 前加上一条:

如果 $p = q, x_1 = \frac{1}{2}(a+b), y_1 = \frac{1}{2}(c+d)$ 停机打出 a, b, c, d, p 等数值.

这点可能就是解, 因为 $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ 与 $f(x,y) = 0$, $g(x,y) = 0$ 等价.

旋 升 法

与 §3 同样的问题, 旋升法的计算程序如下:

1) 用一维方法算出 $F(x,y)$ 在

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad y = y_1 = c$$

上的最小值, 并设在 $x = x_1$ 时取此值. 如果此值合乎要求, 停机, 打出 x_1, y_1;

2) 仍用一维的方法算出 $F(x,y)$ 在

$$x = x_1, \quad c \leqslant y \leqslant d$$

上的最小值, 设在 $y = y_2$ 时取此值. 如果此值合乎要求, 停机, 打出 x_1, y_2;

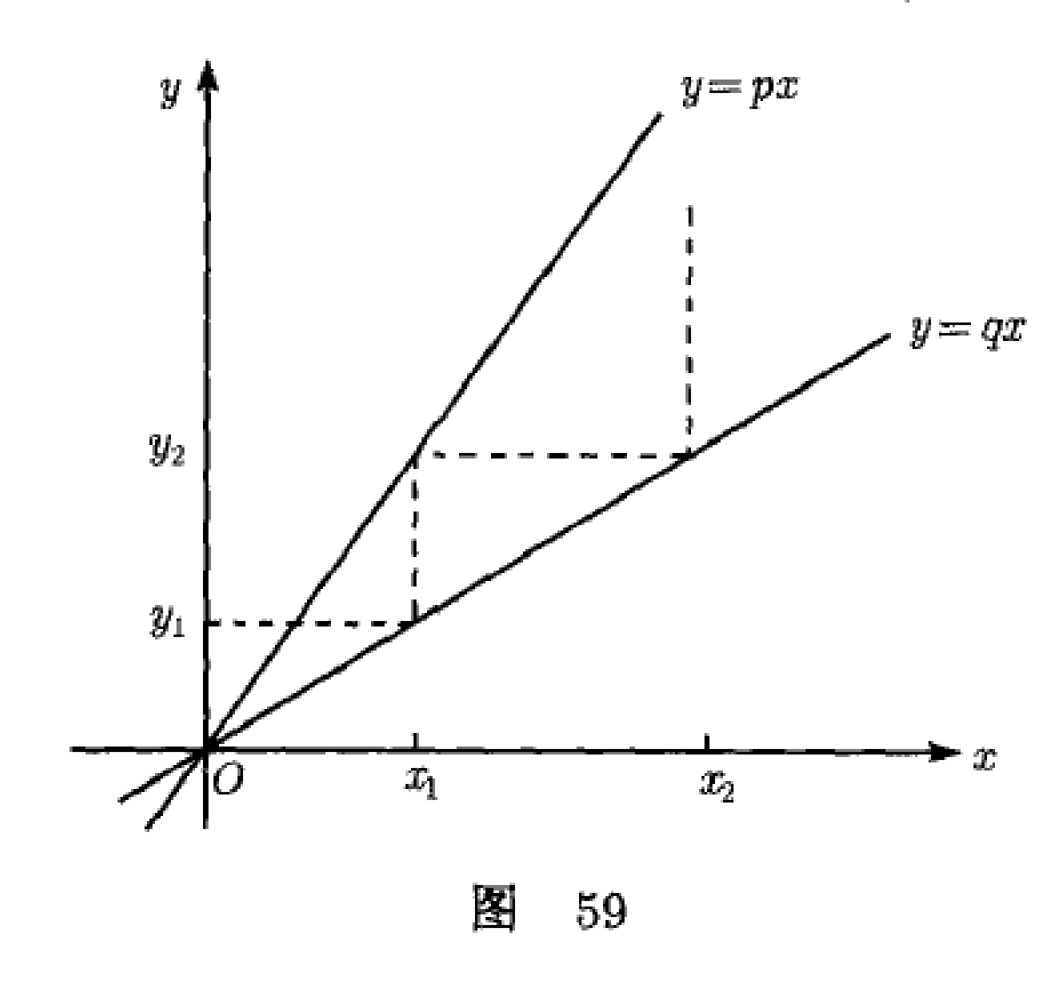


图　59

3) 以 y_2 代替 y_1, 重复以上的计算.

这一方法实际上和以下的方法同一原理: 先求 $f(x, y_1) = 0$ 的解 $x = x_1$, 再求 $g(x_1, y) = 0$ 的解 $y = y_2$ 等等. 请读者注意, 把这方法用到二直线

$$y = px, \quad y = qx$$

图　60

$(|p|>|q|)$ 上去的情形. 若先求 $y_1=qx$ 的解 x_1, 后求 $y=px_1$ 的解 $y_1,\cdots\cdots$, 便将偏离二直线交点愈来愈远. 但若先求 $y_1=px$ 的解 x_1, 后求 $y=qx_1$ 的解 $y_1,\cdots\cdots$, 则能收敛于二直线的交点. 从这一个简单的例子, 可以启发出一般原理来, 甚至可以启发出收敛的条件来.

数值微分法

我们在研究单变数时, 往往用一点及其邻近点的差分来逼近微分, 也即

$$f'(x_0)\sim\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}.$$

在多变数时, 必须增加另外的假定, 而不能泛泛地用一点及其邻近几点的数值来逼近偏微商. 例如在 $x=x_0, y=y_0$ 处 $f(x,y)$ 的偏微商 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 的值, 能否由此点及其两邻点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 的函数值来逼近呢? 不增加条件是不行的. 譬如说, 三点在一条直线上不行, 因为这样只能决定一个方向; 夹角太小也不行. 另一方面, 如果两方向趋于 (x_0,y_0) 的速度太不一致也不行. 例如

$$f(x,y)=x^2+y^2$$

在 $x=0,y=0$ 时偏微商都等于 0, 但 $x=\varepsilon, y=\varepsilon^{\frac{2}{5}}$ 时

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x^2+v^2}{x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^2+\varepsilon^{\frac{4}{5}}}{\varepsilon}=\infty$$

这是第四 (第五) 章中我们不是随意取 $s+1$ 点 $\left(\text{或 }\dfrac{1}{2}(s+1)(s+2)\text{ 点}\right)$ 的道理.

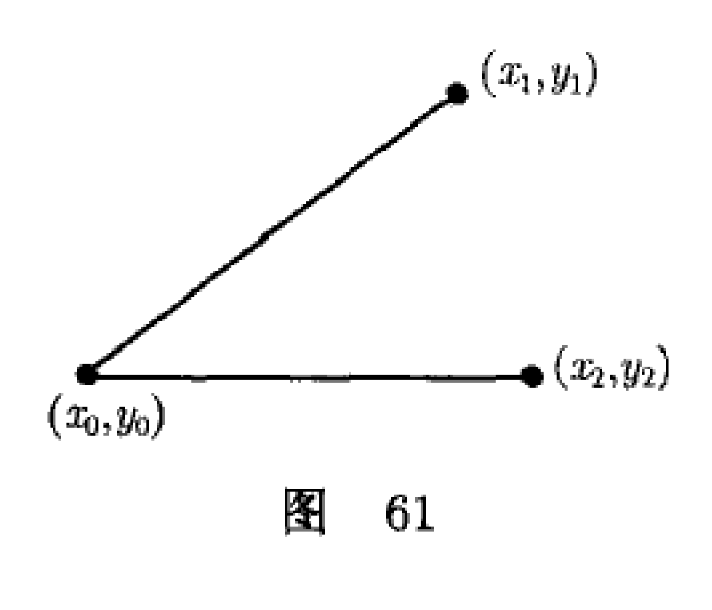


图 61

对怎样的三点有此可能呢? 实质上, 如果面积的绝对值

$$\left\|\begin{matrix}x_1-x_0 & y_1-y_0\\ x_2-x_0 & y_2-y_0\end{matrix}\right\|\geqslant K\left(\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}+\sqrt{(x_2-x_0)^2+(y_2-y_0)^2}\right)^2.$$

在此条件下, 可望成功, 读者自证这条件保证了夹解不能任意小.

为了方便起见, 还是采用矩阵符号, 在 s 维空间给了 $s+1$ 个点 $x^{(i)}(i=0,1,\cdots,s)$ 从

$$\varphi(x^{(i)})=\alpha+\boldsymbol{b}x^{(i)}\quad(i=0,1,2,\cdots,s)\tag{1}$$

定出向量 $\boldsymbol{b}$, 在什么条件下, 向量 $\boldsymbol{b}$ 可以逼近

$$\text{grad }\varphi=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial\varphi}{\partial x_s}\right)_{x=x^{(0)}}.\tag{2}$$

定理 1　命 $d_i=\sum_i\left|x_j^{(i)}-x_j^{(0)}\right|$ 及

$$M=\begin{pmatrix} x^{(1)}-x^{(0)} \\ x^{(2)}-x^{(0)} \\ \cdots\cdots \\ x^{(s)}-x^{(0)} \end{pmatrix}.$$

如果 $M'M$ 的最小特征根 $\geqslant K\sum_{i=1}^{s}d_i^2$, 则

$$(b-\text{grad }\varphi(x^{(0_1)}))(b-\text{grad }\varphi(x^{(0)}))'\leqslant Q\sum_{i=1}^{s}d_i^2.$$

这里 Q 仅依赖于 φ 的二阶微商的上界及 K.

证　由于

$$\begin{aligned}\varphi(x^{(i)})-\varphi(x^{(0)})&=\int_0^1\frac{d}{d\alpha}\varphi(x^{(0)}+\alpha(x^{(i)}-x^{(0)}))d\alpha\\&=\sum_{j=1}^{s}(x_j^{(i)}-x_j^{(0)})\int_0^1\varphi_{x_j}(x^{(0)}+\alpha(x^{(i)}-x^{(0)}))d\alpha\\&=\sum_{j=1}^{s}(x_j^{(i)}-x_j^{(0)})\varphi_{x_j}(x^{(0)})+\sum_{j=1}^{s}(x_j^{(i)}-x_j^{(0)})\\&\quad\cdot\int_0^1[\varphi_{x_j}(x^{(0)}+\alpha(x^{(i)}-x^{(0)}))-\varphi_{x_j}(x^{(0)})]d\alpha.\\&=\text{grad }\varphi(x^{(0)})(x^{(i)}-x^{(0)})'\\&\quad+\sum_j\sum_k(x_j^{(i)}-x_j^{(0)})(x_k^{(i)}-x_k^{(0)})A_{jk}^{(i)},\end{aligned}$$

此处 $A_{jk}^{(i)}$ 仅依赖于 φ 的二阶微商.

由 (1) 可知

$$\varphi(x^{(i)})-\varphi(x^{(0)})=b(x^{(i)}-x^{(0)})'$$

因此

$$(b-\text{grad }\varphi(x^{(0)}))(x^{(i)}-x^{(0)})'=p_i \tag{3}$$

这儿

$$p_i=\sum_j\sum_k(x_j^{(i)}-x_j^{(0)})(x_k^{(i)}-x_k^{(0)})A_{jk}^{(i)},$$

及

$$|p_i| \leqslant A\left(\sum_j \left|x_j^{(i)} - x_j^{(0)}\right|\right)^2 = Ad_i^2,$$

K—— 常数, A 仅依赖于 φ 的二阶微商的上界.

(3) 式可以写成为

$$(b - \text{grad } \varphi(x^{(0)}))M' = (p_1, p_2, \cdots, p_s),$$

因此

$$(b - \text{grad } \varphi(x^{(0)}))M'M(b - \text{grad } \varphi(x^{(0)}))' = \sum_{i=1}^{s} p_i^2.$$

由定理的假定可知

$$K\sum_{i=1}^{s} d_i^2 (b - \text{grad } \varphi(x^{(0)}))(b - \text{grad } \varphi(x^{(0)}))' \leqslant A^2 \sum_{i=1}^{s} d_i^4$$

此即所求.

方程组的数值解

本书第五章所介绍的方法也可以用来处理求方程组的数值解的问题. 求

$$f_1(x_1, \cdots, x_n) = 0, \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_n) = 0 \tag{1}$$

的数值解, 用矩阵写法

$$f(x) = 0. \tag{2}$$

先给了精密度 η, 例如精确到五位小数, 则取 $\eta = 10^{-6}$, 用叠代法

$$x^{(v+1)} = x^{(v)} - f(x^{(v)})A(x^{(v)})^{-1}, \tag{3}$$

这儿

$$A(x^{(\nu)}) = \begin{pmatrix} \Delta x_1 f(x^{(v)}) \\ \cdots\cdots \\ \Delta x_n f(x^{(v)}) \end{pmatrix}, \quad \Delta x_i f(x) = \frac{f(x + l_i\eta) - f(x)}{\eta}. \tag{4}$$

定理 1 假定

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i \partial x_k}\right| \leqslant M, \tag{5}$$

则

$$\|x^{(v+1)}-x^{(v)}\| \leqslant \frac{1}{2}M(\|x^{(v-1)}-x^{(v)}\|^2+\eta\|x^{(v-1)}-x^{(v)}\|)\|A(x^{(v)})^{-1}\|. \qquad (6)$$

证　由 (3) 可知

$$\begin{aligned}(x^{(v+1)}-x^{(v)})A(x^{(v)}) =&(f(x^{(v-1)})-f(x^{(v)})+(x^{(v)}-x^{(v-1)})A(x^{(v-1)})\\ =&\int_0^1 \frac{d}{d\alpha}f(x^{(v)}+\alpha(x^{(v-1)}-x^{(v)})d\alpha\\ &+\sum_{j=1}^n(x_j^{(v)}-x_j^{(v-1)})\Delta x_j f(x^{(v-1)})\\ =&\sum_{j=1}^n(x_j^{(v-1)}-x_j^{(v)})\Bigg[\int_0^1 f_{x_j}(x^{(v)}+\\ &\alpha(x^{(v-1)}-x^{(v)}))d\alpha-\int_0^1 f_{x_j}(x^{(v-1)}+\alpha l_j\eta)d\alpha\Bigg]\\ =&\sum_{j=1}^n(x_j^{(v-1)}-x_j^{(v)})\int_0^1\int_0^1\frac{d}{d\beta}f_{x_j}(x^{(v-1)}+\alpha l_j\eta\\ &+\beta((1-\alpha)(x^{(v)}-x^{(v-1)})-\alpha l_j\eta)]d\beta d\alpha\\ =&\sum_{j=1}^n(x_j^{(v-1)}-x_j^{(v)})\int_0^1\int_0^1\sum_{k=1}^n[(1-a)\\ &\cdot(x_k^{(v)}-x_k^{(v-1)})-\alpha\delta_{jk}\eta]f^{(*)}_{xjx_k}d\beta d\alpha\end{aligned}$$

因此得到

$$\begin{aligned}\|x^{(v+1)}-x^{(v)}\| \leqslant&\Bigg\{M\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n\left|x_j^{(v-1)}-x_j^{(v)}\right|\Big|x_k^{(v)}\\ &-x_k^{(v-1)}\Big|\int_0^1\int_0^1(1-\alpha)d\alpha d\beta+\eta M\sum_{j=1}^n\Big|x_j^{(v)}\\ &-x_j^{(v-1)}\Big|\int_0^1\int_0^1\alpha d\alpha d\beta\Bigg\}\left\|A(x^{(v)})^{-1}\right\|\leqslant\frac{M}{2}\Big(\Big\|x^{(v)}\\ &-x^{(v-1)}\Big\|^2+\eta\left\|x^{(v)}-x^{(v-1)}\right\|\Big)\left\|A(x^{(v)})^{-1}\right\|.\end{aligned}$$

定理 2　假定

$$\sum_{j=1}^n\left|\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial x_k}\right|\leqslant M, \qquad (7)$$

$$M\|x^{(v)}-x^{(v-1)}\|\ \|A(x^{(v-1)})^{-1}\|\leqslant\alpha_{v-1}<1,\tag{8}$$

则得

$$\|A(X^{(v)})^{-1}\|\leqslant\frac{1}{1-\alpha_{v-1}}\|A(x^{(v-1)})^{-1}\|.\tag{9}$$

证　命

$$A(x^{(v)})-A(x^{(v-1)})=(p_{ij}),\quad A(x^{(v-1)})^{-1}=(g_{ij}),$$

则

$$\begin{aligned}p_{ij}&=\Delta_{x_i}(f_j(x^{(v)})-f_j(x^{(v-1)})\\&=\Delta_{x_j}\int_0^1\frac{d}{d\alpha}f_j(x^{(v-1)}+\alpha(x^{(v)}-x^{(v-1)}))d\alpha\\&=\sum_{k=1}^n(x_k^{(v)}-x_k^{(v-1)})\Delta_{x_i}\int_0^1 f_jx_k(x^{(v-1)}\\&\quad+\alpha(x^{(v)}-x^{(v-1)}))d\alpha,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\|I-A(x^{(v)})A(x^{(v-1)})^{-1}\|&\leqslant\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\sum_{l=1}^n|p_{ij}||q_{jl}|\\&\leqslant\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\sum_{l=1}^n\sum_{k=1}^n\left|x_k^{(v)}-x_k^{(v-1)}\right|\int_0^1|\Delta x_if_jx_k(x^{(v-1)}\\&\quad+\alpha(x^{(v)}-x^{(v-1)}))|d\alpha|q_{jl}|\\&\leqslant M\|x_k^{(v)}-x_k^{(v-1)}\|\ \|A(x^{(v-1)})^{-1}\|\end{aligned}\tag{10}$$

这里用了

$$\sum_i|\Delta x_if_jx_k|\leqslant\int_0^1\sum_i|f_jx_kx_i|d\beta\leqslant M$$

命

$$I-A(x^{(v)})A(x^{(v-1)})^{-1}=B\tag{11}$$

则

$$A(x^{(v)})^{-1}=A(x^{(v-1)})^{-1}(I-B)^{-1},$$

由定理的假定及上章 §1 引理 1 得到所要的结论.

定理 3　如果

$$M\|x^{(1)}-x^{(0)}\|\ \|A(x^{(0)})^{-1}\|\leqslant \alpha_0<\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

及

$$\|x^{(v)}-x^{(v-1)}\|\geqslant \eta,$$

则

$$\|x^{(v+1)}-x^{(v)}\|<\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\alpha_0\right)^{2v-1}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{v}\|x^{(1)}-x^{(0)}\|$$

证明方法和第五章的定理 3 完全一样.

在计算机上使用时, 不必验证 (5), (7), (8) 是否适合, 而直接应用叠代公式 (3), 如果

$$\|x^{(v+1)}-x^{(v)}\|<\|x^{(v)}-x^{(v-1)}\|,$$

即可大胆地做下去, 不然, 停机换其他方法缩小范围.

我们提请读者注意第五章 §5 的方法.

求　重　心

在第三章中我们间提到求重心的问题, 高维的重心必须应用多重积分, 而多重积分的计算在计算数学中又是一件麻烦的事, 一般讲来我们需要计算出 $s+1$ 个 s 重积分

$$V=\int\underset{R}{\cdots}\int dx_1\cdots dx_s,$$

$$M_1=\int\underset{R}{\cdots}\int x_1dx_1\cdots dx_s,\cdots,$$

$$M_s=\int\underset{R}{\cdots}\int x_sdx_1\cdots dx_s.$$

这里 R 是一个多面体, 也就是适合 p 个不等式

$$R_i:\sum_{j=1}^{s}a_{ij}x_j<b_i\quad(i=1,2,\cdots,p)$$

的点的集合. 计算多重积分时, 我们用 Mont-Carlo 方法, 对这一问题有稍为简化的建议. 假定 R 在一个 "方体"

$$K:|x_i|<A\quad(i=1,2,\cdots,s)$$

内, 利用随机数表 (或随机数发生器) 在获得 s 个数 $(\xi_1,\cdots,\xi_s)$ 后, 看它是否在 R 中. 如果不在 R 中就作罢; 如果在 R 中则写下

$$1,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s; \tag{1}$$

再获得 $\xi_1^{(1)},\xi_2^{(1)},\cdots,\xi_s^{(1)}$ 后, 如果不在 R 中则作罢, 如果在 R 中, 则在 (1) 上加上

$$1,\xi_1^{(1)},\xi_2^{(1)},\cdots,\xi_s^{(1)};$$

得

$$2,\eta_1^{(1)}=\xi_1+\xi_2^{(1)},\cdots,\eta_s^{(1)}=\xi_s+\xi_s^{(1)};$$

再做下去, 得 $\xi_1^{(2)},\cdots,\xi_s^{(2)}$, 如果不在 R 中, 则作罢, 如果在 R 中, 则加成

$$3,\eta_1^{(2)}=\eta_1^{(1)}+\xi_1^{(2)},\cdots,\eta_s^{(2)}=\eta_s^{(1)}+\xi_s^{(2)};$$

$\cdots$; 一般是

$$m,\eta_1^{(m-1)}=\eta_1^{(m-2)}+\xi_1^{(m-1)},\cdots,\eta_s^{(m-1)}=\eta_s^{(m-2)}+\xi_s^{(m-1)}.$$

当 m 充分大时, 我们拿

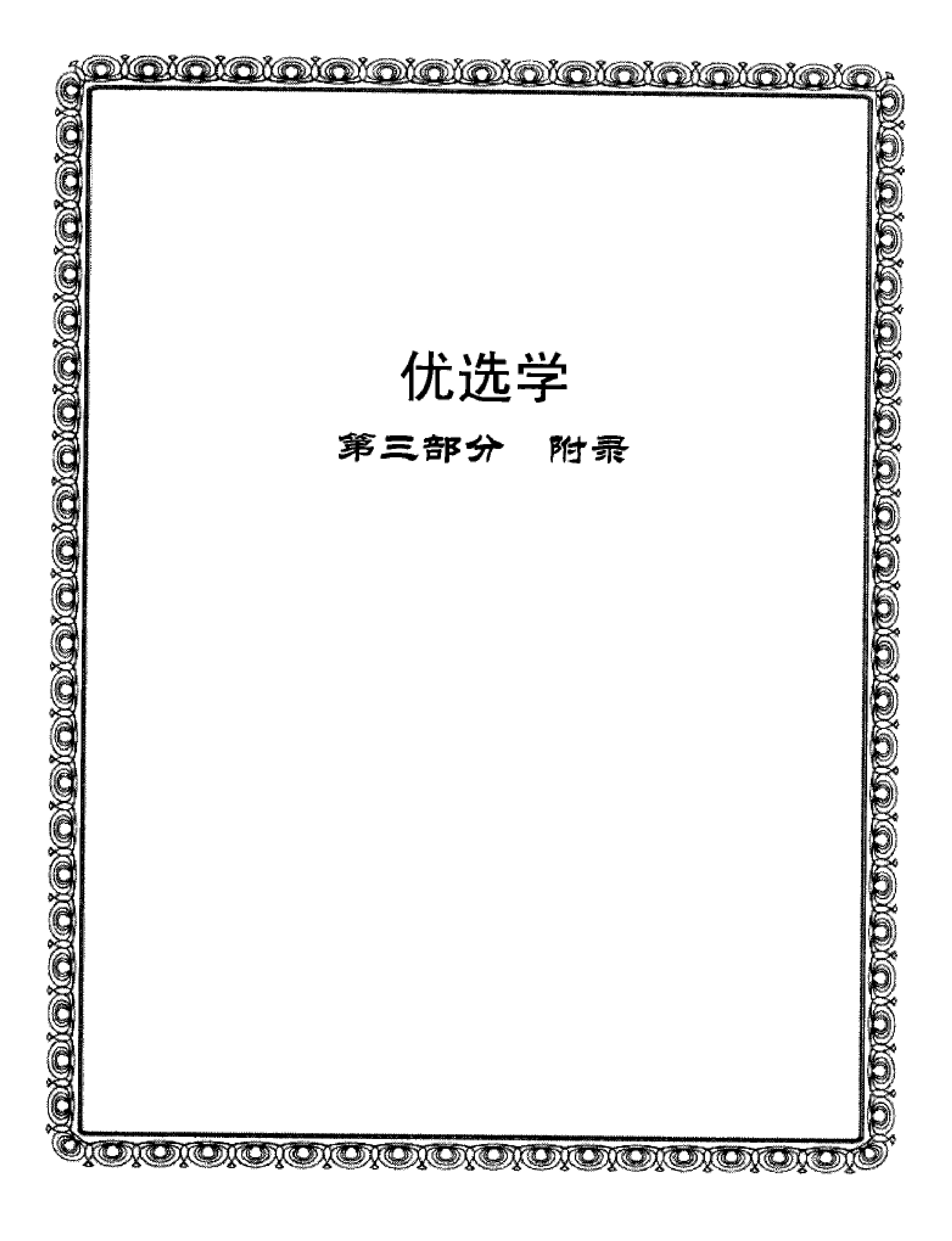
$$\frac{\eta_1^{(m-1)}}{m},\cdots,\frac{\eta_s^{(m-1)}}{m}$$

来作为重心的坐标. 何谓充分大? 当然可以有概率建议, 我们的简单建议是: 如果再做一次和上一次所得的数值差不多就停止 (或只要求 $\dfrac{\eta_1^{(m-1)}}{m}$ 和 $\dfrac{\eta_1^{(m)}}{m+1}$ 差不多就停止也可以, 或要求

$$\frac{\eta_1^{(m-1)}+\cdots+\eta_s^{(m-1)}}{m} \text{ 和 } \frac{\eta_1^{(m)}+\cdots+\eta_s^{(m)}}{m}$$

差不多也可以).

这方法的概率误差是极好的, 因此可以认为已经符合我们的要求. 也许有人说: 概率总是概率, 其中包括了万一的失误, 但是, 这一点小险是要冒的.



优选学

第三部分　附录

附录一 度 量 问 题

令 $\varphi(x)$ 是一个不降的函数, 而且

$$\varphi(0)=0, \quad \varphi(1)=1.$$

则当 x 过 $[0, 1]$ 时, $y=\varphi(x)$ 也从 0 到 1.

在变数 x 上用黄金分割法逐步在

$$x_0, x_1, x_2, \cdots$$

做试验时, 等价于 y 在

$$y_0, y_1, y_2, \cdots$$

处做试验, 而 $y_n=\varphi(x_n)$.

由中值公式可知

$$y_n-y_{n-1}=\varphi'(\xi)(x_n-x_{n-1}),$$

ξ 在 x_{n-1}, x_n 之间. 如果 $\varphi'(\xi)<1$, 则用 y 做变数比用 x 好, 不然则不好. 由于 $\varphi'(x)$ 的平均值

$$\int_0^1 \varphi'(\xi)d\xi=\varphi(1)-\varphi(0)=1.$$

及 $\varphi'(x)\geqslant 0$, 所以 $\varphi'(x)$ 有时大于 1, 也有时小于 1.

这说明了一个问题, 如果函数 $f(x)$ 的最大值在 x_0, 则取 $\varphi'(x_0)<1$ 的 $y=\varphi(x)$ 作为测度为好, 但由于我们不知道最大值的所在, 因而无法取合适的 $\varphi(x)$. 也就是任何一种测度 $\varphi(x)$ 用黄金分割法, 有些 $f(x)$ 上算, 有些 $f(x)$ 不上算, 也就是用来回调试法, 总会碰得巧上算, 碰得不好不上算, 但上算的可能性极小, 因此在一般情况下, 我们就用原来普通的测度就行了.

多变数的情形测度的变化影响更大, 而且有相互关系, 但在实际问题中, 一般地用常用的标准度量单位就行了, 不要乱改度量单位, 但不排斥有理论根据, 而选取合适测度. 例如在知道每种变化与几何级数有关时不妨用对数刻度.

附录二　与后道工艺过程无关的优选法

在实际中曾经遇到过以下的多因素优选法：要求在区间 (a,b) 中选取 k 个点

$$a < x_1 < \cdots < x_k < b$$

使目标函数 $f_k(x_1,\cdots,x_k;a,b)$ 取最大值，但客观上这问题有以下的特性：在 $a < x_i$ 中，$x_1,\cdots,x_{i-1}$ 也是使某一函数 $f_i(x_1,\cdots,x_{i-1},a,x_i)$ 取最大值的点，$f_i(x_1,\cdots,x_{i-1};a,x_i)$ 与 x_i 以后的点的选择无关.

因为 x_1 是使 $f_2(x_1;a,x_2)$ 取最大值的点，也就是 x_1 适合于

$$g_1(x_1,x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} f_2(x_1,a,x_2) = 0;$$

而 x_1, x_2 也是使 $f_3(x_1,x_2;a,x_3)$ 取最大值的点，也就是适合于

$$g_2(x_1,x_2,x_3) = \frac{\partial}{\partial x_2} f_3(x_1,x_2;a,x_3) = 0;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

因此变为求如下形式的联立方程的解的问题：

$$\begin{cases} g_1(x_1,x_2) = 0, \\ g_2(x_1,x_2,x_3) = 0, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_{k-1}(x_1,\cdots,x_k) = 0, \\ g_k(x_1,\cdots,x_k) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

先取一个试点 $x_1 = x_1^{(1)}$，由 (1) 的第一式解得 $x_2 = x_2^{(1)}$，由第二式解得 $x_3 = x_3^{(1)},\cdots$，由第 $k-1$ 个式解得 $x_k = x_k^{(1)}$，以 $x_1^{(1)},\cdots,x_k^{(1)}$ 代入 (1) 的最后一式得

$$h_1 = g_k(x_1^{(1)},\cdots,x_k^{(1)})$$

如果 $h_1 = 0$，则 $x_1^{(1)},\cdots,x_k^{(1)}$ 就可能是解了，不然不妨假定 $h_1 > 0$，再取 $x_1 = x_1^{(2)}$，同法得

$$h_2 = g_k(x_1^{(1)},\cdots,x_k^{(2)})$$

如果 $h_2 = 0$，则得解答，如果 $h_2 < 0$，则取 $x_1 = \dfrac{x_1^{(1)} + x_1^{(2)}}{2}$ 进行计算，这样用对分法很快就得出 (1) 的解的近似值. 如果 $h_2 > 0$，则比较 h_1, h_2 哪个大，例如 $h_1 < h_2$，则在 $x_1^{(1)} \to x_1^{(2)}$ 的相反方向选 $x_1^{(3)}$ 就可以找到问题的近似解了.

附录三　一致分布点寻优法

从本书一开始就假定了所考虑的函数是单峰的. 在一般工业生产过程中及在理论上较明确的科学实验中, 已经在生产中的工艺中, 这一假定是可以保证的, 这是我们所介绍的优选法能很快得取得大量成果的道理. 但不能排斥, 在有些认识不足的探索性的科研问题上会出现非单峰的现象, 我们就遇到过 "液晶" 的配方问题. 如果照 "穷举法" 或 "选优法" 做, 工作量太大, 几辈子都做不完, 而且问题不是单峰的, 但与一些公学工作者在一起灵活地混合运用了本书所介绍的方法, 不但很快地找到了最优点, 而且找到了一条 "山脊".

在实践经验少, 不会抓主要矛盾的条件下, 在理论认识不够, 不曾获得精确范围的情况下, 尝试新的科学研究课题, 以下的方法, 可起辅助作用.

如果求 k 个变数 $(x_1,\cdots,x_k)=x$ 的函数 $f(x)$ 的最大值, 其区域是

$$D:\xi_i\leqslant x_i\leqslant\eta_i\quad(i=1,2,\cdots,k).$$

在区域 D 中取一个一致分布的点列

$$x^{(j)}\quad(j=1,2,3,\cdots).\tag{1}$$

在做了若干次试验得出

$$f(x^{(j)})\quad(j=1,2,\cdots,N)$$

后, 可得相当满意的函数值. 再在其附近用本书所介绍的优选法.

这一方法的优点在于容易发现复杂的 "地形"(非单峰的情况), 但缺点在于虽然比选优法好得多, 但比起优选法来次数还嫌太多.

至于一致分布点列的构造, 就不在此叙述了. 请看华罗庚, 王元《数论在近似分析中的应用》(科学出版社, 1978). 一致分布点法, 在求数值积分上已有好的成效, 而求极值的问题可以看成为某一带参数的积分的极限, 即

$$\max|f|=\lim_{p\to\infty}\left(\int_0^1\cdots\int_0^1|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

附录四　求定正方阵的逆

在第二部分第五章 §2 中要用到求定正对称方阵之逆，同时定正方阵求逆法也是种类繁多的多因素优选法的根本依据，因此写这个附录，先总的指明一下，错综复杂的许多方法，实质上都是从解二次方程的“凑平方法”得来的.

求对称定正方阵的逆

$$S=\begin{pmatrix} s_{11},\cdots,s_{1K}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\\ s_{k1},\cdots,s_{kk}\end{pmatrix}$$

是一对称方阵，$S=S'$，其第 i 个主对角线方阵是

$$S_i=\begin{pmatrix} s_{11},\cdots,s_{1i}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\\ s_{i1},\cdots,s_{ii}\end{pmatrix}$$

又令 $V_{i-1}=(s_{i1},\cdots,s_{i,i-1})$. S_i 的逆 $H_i(=S_i^{-1})$ 可由以下的递归公式得之：

$$S_1^{-1}=H^{(1)}=\frac{1}{s_{11}},\quad S_i^{-1}=H^{(i)}=\begin{pmatrix}H^{(i-1)} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$
$$+\frac{(-V_{i-1}H^{(i-1)},1)'(-V_{i-1}H^{(i-1)},1)}{s_{ii}-V_{i-1}H^{(i-1)}V_{i-1}'}. \tag{1}$$

因此经 k 次迭代，得 $S^{-1}=H^{(k)}$.

证　由于

$$S_i=\begin{pmatrix} S_{i-1} & V_{i-1}'\\ V_{i-1} & s_{ii}\end{pmatrix}$$

及

$$\begin{pmatrix} I & 0\\ -V_{i-1}S_{i-1}^{-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_{i-1} & V_{i-1}'\\ V_{i-1} & s_{ii}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0\\ -V_{i-1}S_{i-1}^{-1} & 1\end{pmatrix}'$$

$$= \begin{pmatrix} S_{i-1} & 0 \\ 0 & s_{ii} - V_{i-1}S_{i-1}^{-1}V_{i-1}' \end{pmatrix}$$

(即 “凑平方法”), 求逆得

$$S_i^{-1} = H^{(i)} = \begin{pmatrix} I & -H^{(i-1)}V_{i-1}' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} H^{(i-1)} & 0 \\ 0 & (s_{ii} - V_{i-1}S_{i-1}^{-1}V_{i-1}')^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} I & 0 \\ -V_{i-1}H^{(i-1)} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H^{(i-1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{s_{ii} - V_{i-1}H^{(i-1)}V_{i-1}'} \begin{pmatrix} H^{(i-1)}V_{i-1}'V_{i-1}H^{(i-1)} & -H^{(i-1)}V_{i-1}' \\ -V_{i-1}H^{(i-1)} & 1 \end{pmatrix},$$

即得所证.

附记　求任意方阵 A 的逆也可用此法: 由恒等式

$$A^{-1} = A'(AA')^{-1},$$

分为对称方阵 $S = AA'$ 的求逆法. 有些书对 $A = A^{(n,m)}$ 时, 将 $A'(AA')^{-1}$ 定义为 A 的广义逆.

线性方程组求解

在第二部分第五章经常遇到线性方程组

$$\boldsymbol{x}A = \boldsymbol{b}$$

的求解问题. 这里 A 是 n 阶对称正定方阵, $\boldsymbol{b}$ 是 n 维向量, $\boldsymbol{x}$ 则是 n 维解向量.

对于这种方程组的求解, 建议采取以下的方法.

第一步: 先将系数矩阵 A 表成

$$A = LDL'$$

的形状, 这里 L 为一个对角线元素全等于 1 的下三角阵, L' 为其转置, D 为一个对角矩阵.

用 $a_{ij}, l_{ij}(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ 表示矩阵 A, L 中位于第 i 行, 第 j 列交点上的元素, 自然有

$$a_{ij} = a_{ji},$$
$$l_{ii} = 1, \quad l_{ij} = 0 \quad (1 \leqslant i < j),$$

又用 d_i 表示矩阵 D 的第 i 个对角线元素, 于是根据公式

$$l_{ij}=\left(a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1}(l_{ik}d_k)\cdot l_{jk}\right)\Big/d_j \quad (1\leqslant j<i\leqslant n)$$

$$d_i=a_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1}(l_{ik}d_k)l_{ik} \quad (1\leqslant i\leqslant n)$$

依次确定出 L 与 D 的元素:

$$\begin{array}{llllll}
d_1, & & & & & \\
\cdots & \cdots & & & & \\
l_{i,1}, & l_{i,2}, & \cdots, & l_{i,i-1}, & d_i, & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
l_{n1}, & l_{n2}, & \cdots & \cdots & \cdots\ l_{n,n-1}, & d_n.
\end{array}$$

在实际计算中, 对于一个固定的 $i(1\leqslant i\leqslant n)$, 由于

$$l_{ik}d_k \quad (1\leqslant k\leqslant i-1)$$

的反复运用, 可以在每算出一个 l_{ik} 后乘以 d_k 而贮存起来, 以便后面取用.

易见第一部分的计算量 (乘除法) 的数量级是 $n^3/12$.

第二步, 在确定了 L 与 D 后, 通过解方程组

$$\boldsymbol{z}L'=\boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{y}D=\boldsymbol{z}$$
$$\boldsymbol{x}L=\boldsymbol{y}$$

就得出原方程组的解. 因为 L,D,L' 都是三角形阵或对角线阵, 所以这些方程组都很易解, 其乘除法计算量的数量级都不超过 $o(n^2)$.

求抛物体的极值

令

$$z=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}'+\frac{1}{2}\boldsymbol{x}S\boldsymbol{x}', \tag{2}$$

此处 $\boldsymbol{p}$ 是 k 维向量, S 是 k 行列的对称定正方阵、"凑平方法" 就是以下的方法:

$$\begin{aligned} z&=\alpha-\frac{1}{2}\boldsymbol{p}S^{-1}\boldsymbol{p}'+\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}S^{-1})S(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}S^{-1})' \\ &\geqslant\alpha-\frac{1}{2}\boldsymbol{p}S^{-1}\boldsymbol{p}'. \end{aligned} \tag{3}$$

这就是当且仅当

$$\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{p}S^{-1} \tag{4}$$

时, z 取这最小值 $\alpha - \frac{1}{2}\boldsymbol{p}S^{-1}\boldsymbol{p}'$

如用 1. (1), 则得解方程 (4) 的方法如下,

命 $\boldsymbol{p} = (p_1, \cdots, p_k), \boldsymbol{p}^{(i)} = (p_1, \cdots, p_i)$ 定义

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{p}^{(1)} H^{(1)}, \cdots$$

$$\begin{aligned} x^{(i)} &= \boldsymbol{p}^{(i)} H^{(i)} = \boldsymbol{p}^{(i)} \begin{pmatrix} H^{(i-1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{\boldsymbol{p}^{(i)}(-V_{i-1}H^{(i-1)}, 1)'(-V_{i-1}H^{(i-1)}, 1)}{s_{ii} - V_{i-1}H^{(i-1)}V_{i-1}} \\ &= (x^{(i-1)}, 0) + \frac{-x^{(i-1)}V'_{i-1} + p_i}{s_{ii} - V_{i-1}H^{(i-1)}V_{i-1}}(-V_{i-1}H^{(i-1)}, 1), \end{aligned}$$

而 $x^{(k)}$ 就是 (4) 式的解, 这就是求 (2) 式极值的方法.

但这样计算量嫌大, 我们可以用 2. 的办法去求方程

$$\boldsymbol{x}S = -\boldsymbol{p} \tag{5}$$

的解.

附记　有些书上讨论矛盾方程组

$$\boldsymbol{x}A = \boldsymbol{p},$$

$\boldsymbol{x}$ 是 k 维向量, $\boldsymbol{p}$ 是 l 维向量, $A = A^{(k,l)}, k < l$ 的求解问题. 这种方程组本无解, 但硬以

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}A'(AA')^{-1}$$

作为其广义解, 应用时请注意, 这仅对已知 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{p}$ 确有线性关系, 并且有观测误差时, 才可能有用.

如果 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{p}$ 并无线性关系, 而滥用此法, 不但不能正确地反映客观现象, 反而导致思想混乱. 例如原来客观问题是在某一范围的内点有极值, 如果由若干点的试验数据, 而用求广义逆的方法 (或线性迂归) 来处理, 由于线性函数在任一范围的内点是无极值的, 很明显这只会导致错误的结论.

附录五　离散与连续

1. 在第二部分第五章中所介绍的抛物体法是离散型的方法, 如果我们所考虑的函数是易于求出其一、二阶偏微商的, 则有以下的连续型的方法.

以 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_k)$ 表示 k 个变数的向量, 假定函数 $f(x)$ 有一、二阶偏微商, 以

$$\nabla f(x)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$$

表示 f 的梯度向量, 以

$$H_f(x)=\left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant k}$$

表示 f 的二阶微商矩阵 (又称 Hessian 阵), 则由 $f(x)$ 在一点 a 处的幂级数展式的二次以下项

$$f(a)+\nabla f(a)(x-a)'+\frac{1}{2}(x-a)H_f(a)(x-a)' \tag{1}$$

可以得出迭代法. (1) 式的极值可由 "凑平方法" 得之, 如在附录四中所做的那样, 若 H_f 为定负矩阵, 则 (1) 式就是

$$f(a)+\frac{1}{2}(x-a+\nabla fH_f^{-1})H_f(x-a+\nabla fH_f^{-1})'$$

$$-\frac{1}{2}\nabla fH_f^{-1}(\nabla f)'\leqslant f(a)-\frac{1}{2}\nabla fH_f^{-1}(\nabla f)', \tag{2}$$

则 (1) 式当

$$x=a-\nabla fH_f^{-1} \tag{3}$$

时取极大值. 令 $x=x^{(1)}$ 是一个初始值, 则用递推公式

$$x^{(n+1)}=x^{(n)}-\nabla f(x^{(n)})H_f^{-1}(x^{(n)})\quad(n=1,2,\cdots)$$

比第五章更容易证明这方法也是 log log 型的方法.

2. Davidon-Fletcher-Powell 引进了如下的半离散半连续的方法, 从初始值 $x^{(1)}$ 及 $H_1=I^{(k)}$ 出发, 用以下的迭代公式从 $x^{(n)}$, H_n 得 $x^{(n+1)},H_{n+1}$.

有了 $x^{(n)},H_n$ 后, 求单变数 λ 的函数

$$\varphi(\lambda)=f(x^{(n)}-\lambda\nabla(f(x^{(n)}))H_n) \tag{4}$$

的极大值, 得 $\lambda=\lambda_n$. 然后取

$$x^{(n+1)}=x^{(n)}-\lambda_n\nabla(f(x^{(n)}))H_n$$

并令

$$y_n=\nabla f(x^{(n+1)})-\nabla f(x^{(n)}) \tag{5}$$

及

$$\begin{aligned}H_{n+1}=H_n&+\lambda_n\frac{(\nabla f(x^{(n)})H_n)'(\nabla f(x^{(n)})H_n)}{\nabla f(x^{(n)})H_ny_n'}\\&-\frac{(y_nH_n)'(y_nH_n)}{y_nH_ny_n'}\end{aligned} \tag{6}$$

关于这个较复杂的收敛性问题, 我们只得到

$$\|x^{(0)}-x^{(n+1)}\|=o(\|x^{(0)}-x^{(n)}\|), \tag{7}$$

这里 $x^{(0)}$ 是 $f(x)$ 取极值的点, (7) 式仅仅比

$$\frac{\|x^{(0)}-x^{(n+1)}\|}{\|x^{(0)}-x^{(n)}\|}\leqslant q<1$$

稍好一些, 而后者是属于 log 型的.

1) 这方法中要求梯度, 如果用差分来代替, 则和本书第二部分第二章所介绍的最陡上升法有同样的缺点.

2) $\varphi(\lambda)$ 的极值怎样求? 如果用单因素优选法, 一次就要用 log log 次试验, 仅就这一点求法就不可能在数量级上好过抛物体法.

3) 求梯度是连续性的, 而求 y_n 是离散性的, 如果 $\varphi(\lambda)$ 求极值是用解析方法, 则自然也就假定了 $f(x)$ 可以求二阶偏微商, 因此 y_n 可以用 $(x^{(n+1)}-x^{(n)})H$ 来代替 (相差不多), 这里 H 是 $f(x)$ 的二阶微商矩阵 (Hessian matrix).

4) 不要因为他们只能估计出收敛速度 (7), 而以为 (7) 就是本方法的评价, 实质上, 用本书的方法是可以估计出比 (7) 更精密的收敛条件. 但不再把时间花在不比抛物体法好得多的问题上, 因而作为读者练习 (提示: 请考虑 $\|x^{(0)}-x^{(n+k)}\|$ 与 $\|x^{(0)}-x^{(n)}\|$ 的关系).

3. 在 1. 中介绍了一种连续型的方法, 这类方法无疑可以改进. 例如们还可用以下公式

$$\begin{aligned}x_i^{(n+1)}=x_i^{(n)}-b_i^j\frac{\partial f(x^{(n)})}{\partial x_j}&-\frac{1}{2}b_p^jb_i^sb_q^k\frac{\partial f(x^{(n)})}{\partial x_j}\\&\times\frac{\partial f(x^{(n)})}{\partial x_k}\frac{\partial^3 f(x^{(n)})}{\partial x_s\partial x_p\partial x_k}\quad(n=1,2,\cdots)\end{aligned}$$

进行迭代, 这里上下有相同指标表示从 1 到 k 求和,

$$x^{(n)} = (x_1^{(n)}, \cdots, x_k^{(n)}), \quad B = \begin{pmatrix} b_1' \cdots b_k' \\ \cdots\cdots \\ b_1^k \cdots k_k^k \end{pmatrix} = H(f(x^{(n)}))^{-1}.$$

这个方法比 1. 的方法收敛得快些, 但还是 log log 型的方法, 且计算量较大, 与这方法相应的离散型及半离散半连续型的方法, 由于既没有理论上的困难, 也没有实际上的显著优越性, 这里就不谈了.

附录六　几何优选法

1. 光以最短的时间从一点到达另一点. 两点之间以直线为最短, 因此光从一点 A 到另一点 B 的行程为连 A,B 的直线.

光由一点 A 经镜面上 O 点反射到另一点 B. 图中角 α 称为射入角, 角 β 称为射出角. 如果 $\alpha \neq \beta$, 作 B 对镜面的对称点 $B', OA+OB > AB', AB'$ 交镜面于 O', 则显然有 $OA+OB > O'A+O'B$. 因此由光行时间最短推导出射入角 α 一定等于射出角 β.

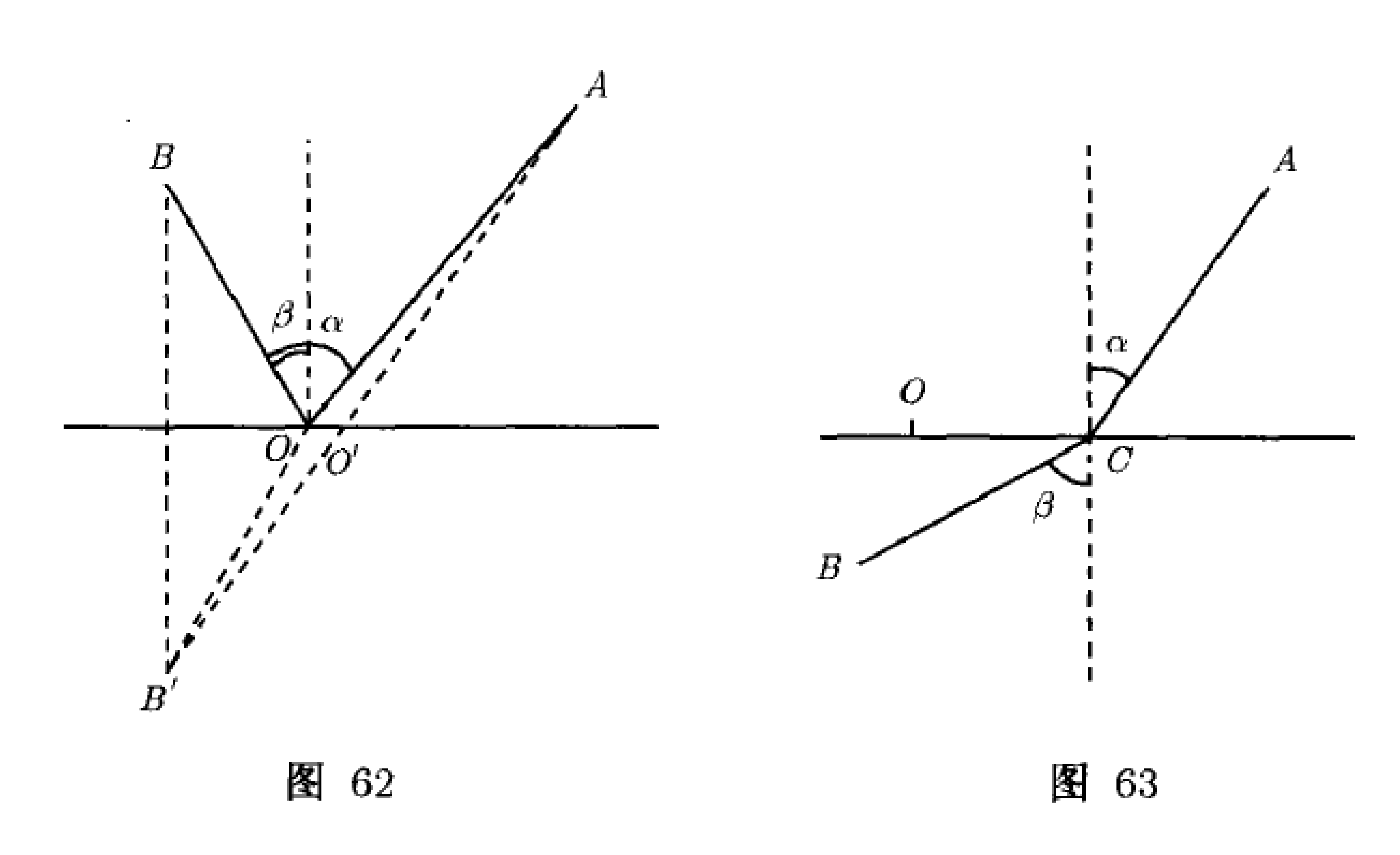


图 62　　　　图 63

光的折射也是这个原理. 例如光在空气中以速度 v 进行, 在点 C 进入水中以速度 u 达到 B 点, 求最速的途径. 取水平面上一点 O 作为原点, A,B,C 的坐标各为 $(a_1,a_2),(b_1,b_2),(x,0)$, 因此由点 A 到点 B 的时间等于

$$f(x)=\frac{\sqrt{(a_1-x)^2+a_2^2}}{v}+\frac{\sqrt{(b_1-x)^2+b_2^2}}{u}$$

求 $f(x)$ 的微商使之为 0,

$$\frac{a_1-x}{v\sqrt{(a_1-x)^2+a_2^2}}+\frac{b_1-x}{u\sqrt{(b_1-x)^2+b_2^2}}=0,$$

因此得

$$\frac{\sin\ \alpha}{v}=\frac{\sin\ \beta}{u},$$

即得折射定律.

这个折射定律实际上就是光学设计的主要物理根据. 一个光学镜头 (如望远镜, 照相机镜头等) 通过是由数片透镜组成 (图 64). 来自镜头前物面上的光线, 按照折射定律依次通过各镜面, 在镜头后成像. 但这个像不一定是原物体的一个严格的几何相似形, 而是有一定的偏差 (称为像差). 所谓光学设计, 就是在某些约定条件下, 通过选择这些透镜的镜面曲率、厚度、间隔、折射率等参数, 论使所产生的像差尽可能小一些.

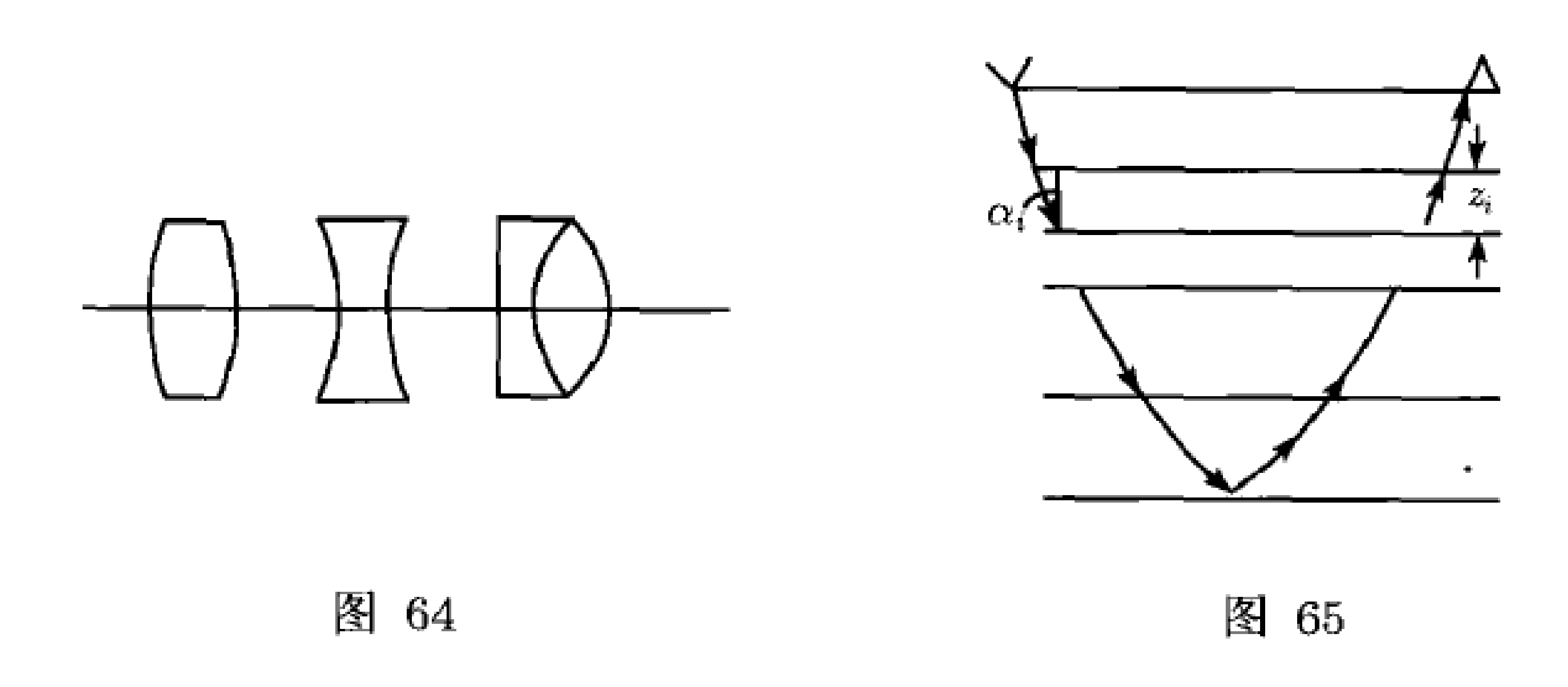


图 64　　图 65

波的传播同样有反射折射定律. 在勘探石油时, 用人工地震的办法. 在一点放炮, 在相距 x 处有检波器接收. 如果地层是由多层水平层状介质形成, 第 i 层的厚度为 z_i, 波速为 v_i, 则地震波从第 n 层反射到达检波器的时间为

$$t=2\sum_{i=1}^{n}\frac{z_i}{v_i\cos\alpha_i}=2\sum_{i=1}^{n}\frac{z_i}{v_i\sqrt{1-p^2v_i^2}},$$

而距离 x 等于

$$x=2\sum_{i=1}^{n}z_i\tan\alpha_i=2\sum_{i=1}^{n}\frac{z_ipu_i}{\sqrt{1-p^2v_i^2}},$$

这里 $p=\frac{\sin\alpha_i}{v_i}$, α_i 为第 i 层的波的入射角.

如果地层为连续介质, 且速度为深度的函数, 则时距之间有如下关系

$$t=2\int_0^2\frac{dz}{v(z)\sqrt{1-p^2v^2(t)}},\quad x=2\int_0^2\frac{pv(z)dz}{\sqrt{1-p^2v^2(z)}},$$

这里 z 为反射层的深度.

2. 集散点问题. 在 (x_i,y_i) 点有 a_i 吨原料 $(i=1,2,\cdots,l)$ 要运到 (ξ,η) 处加工, 加工后又要各运 b_j 吨到 (u_j,v_j) 处 $(j=1,2,\cdots,m)$. 问选择哪一点 (ξ,η) 运输

的吨公里最少？吨公里等于

$$f(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{l}a_i\sqrt{(x_i-\xi)^2+(y_i-\eta)^2}+\sum_{j=1}^{m}b_j\sqrt{(u_j-\xi)^2+(v_j-\eta)^2}.$$

要解联立方程

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}=\sum_{i=1}^{l}\frac{a_i(\xi-x_i)}{\sqrt{(x_i-\xi)^2+(y_i-\eta)^2}}+\sum_{j=1}^{m}\frac{b_j(\xi-u_j)}{\sqrt{(u_j-\xi)^2+(v_j-\eta)^2}}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta}=\sum_{i=1}^{l}\frac{a_i(\eta-y_i)}{\sqrt{(x_i-\xi)^2+(y_i-\eta)^2}}+\sum_{j=1}^{m}\frac{b_j(\eta-v_j)}{\sqrt{(u_j-\xi)^2+(v_j-\eta)^2}}=0$$

中的 ξ,η 的数值并不容易．1960 年万哲先同志提出了以下的模拟法．(注意：当 $l=m=1$ 时，这问题就已比上节光的折射问题难些了.)

先在一块光滑木板上绘制 l 个发点和 m 个收点的分布图，然后在这些点处各凿一光滑小洞．在板面上置一光滑金属小圆环，小圆环上系 $l+m$ 根绳子，每条绳子各穿过一个小洞，通过发点 (x_i,y_i) 的绳子系上质量为 a_i 的重物，通过收点 (u_j,v_j) 的绳子系上质量为 b_j 的重物．这样当小圆环达到平衡位置时，平衡位置就是所找的 (ξ,η).

我们引入平面向量

$$\boldsymbol{e}_i=\left(\frac{\xi-x_i}{\sqrt{(x_i-\xi)^2+(y_i-\eta)^2}},\frac{\eta-v_i}{\sqrt{(x_i-\xi)^2+(y_i-\eta)^2}}\right),$$

$$\boldsymbol{e}_j'=\left(\frac{\xi-u_j}{\sqrt{(u_j-\xi)^2+(v_j-\eta)^2}},\frac{\eta-v_j}{\sqrt{(u_j-\xi)^2+(v_j-\eta)^2}}\right),$$

则上面的联立方程就是

$$\sum_{i=1}^{l}a_i\boldsymbol{e}_i+\sum_{j=1}^{m}b_j\boldsymbol{e}_j'=0,$$

这正是 $l+m$ 个力的平衡方程，也就是上述模拟法的理论根据.

3. 邮路问题．一个邮递员每次上班，要走遍他负责送信的每条路，然后回到邮局．问应该怎样走才能使他所走的路程最短？这就是邮路问题.

首先考虑这样一个问题. 如下面这样一个道路图 (每条线上的数字表示距离, 小圆圈中的数字表示交叉路口的编号). 我们从一点出发, 有没有可能沿每条路都走过一遍 (不许重复也不许遗漏), 然后回到出发点?

我们把交叉路口分为两类, 偶数条路的交叉点称为偶点, 奇数条路的交叉点称为奇点. 例如上图中, ①, ④, ⑦是偶点, ②, ③, ⑤, ⑥是奇点. 易见, 当一个图中只要有一个奇点时, 就不可能那样走一遍了, 因为对一个路口来说, 有走进去的一条路, 必有走出来的一条路. 反之也不难证明, 当道路图上没有奇点时便可以那样走一遍了. 如果起点和终点可以不同, 则可以允许有二个奇点. 这就是所谓一笔画问题.

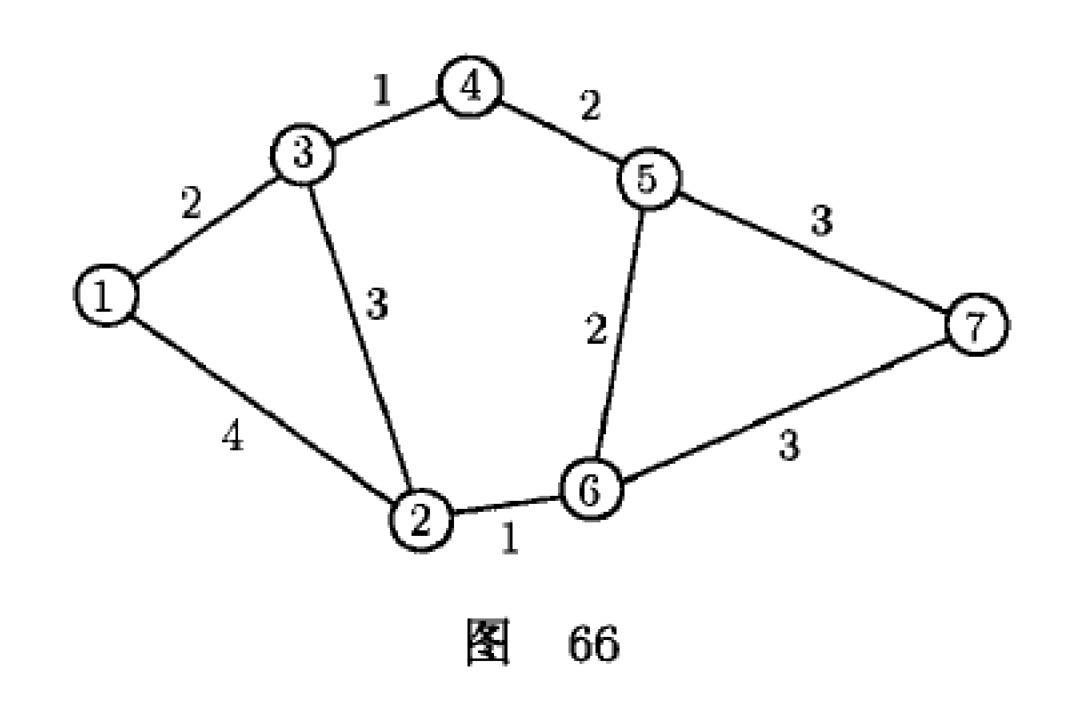


图 66

回到邮路问题, 如果道路图上没有奇点, 问题就已经解决了. 如果有奇点, 我们总可以通过在某一些路上再重复走一遍的办法来消灭奇点, 这相当于在图上再添上一些路. 上图中, 如果在②与③之间, ⑤与⑥之间各添上一条路 (即在②—③, ⑤—⑥上走两次), 奇点就没有了, 于是就可以一笔画了. 但我们还要求所走的路程最短, 因此问题归结为: 如何选择要重复的路程, 既能消灭奇点, 又能使重复的路程最短?

这个问题已被管梅谷同志解决. 他证明了: 只要在每个圈上重复的路程不超过整个圈长的一半, 这时就可以得到路程最短的走法了.

例如在上页图中, 如果重复②—③, ⑤—⑥两条路, 可以消灭奇点, 但在圈②—③—④—⑤—⑥—②上重复路程 $2+3=5$ 已超过整个圈长之半 (4.5), 所以它不是路程最短的走法. 但我们可以改为重复②—⑥, ③—④, ④—⑤, 这样既消灭了奇点, 又使得每个圈上重复路程都不超过整个圈长之半, 于是得到这样一个路程最短的走法:

①⟶③⟶④⟶⑤⟶⑥⟶⑦⟶⑤⟶④⟶③⟶②⟶⑥⟶②⟶①

综合上述, 得到这样一个解决邮路问题的步骤: 首先把道路图上所有的奇点找出来, 然后选择一些需要重复的路, 使奇点消灭. 再在每个圈上检查重复路程是否超过整个圈长之半, 如有超过的情况, 则在这个圈上, 把原来不重复的路定为重复

的路, 而原来重复的路定为不重复的路. 这样逐步调整, 当所有圈上重复路程都不超过整个圈长之半时, 就达到路程最短了. 最后将整个图形一笔画出.

一般来说一个图上所具有的圈数是很多的, 是否必要每个圈都检查? 如上图共有六个圈, 实际上只要检查三个圈就够了. 一般, 如一个图有 s 条路, n 个点, 则需要检查的圈数为 $s-n+1$.

在画交通图时还要注意一个问题, 一条很宽的马路, 实际上是需要在马路的两侧各走一次, 这时在交通图上要画两条路, 百不是画一条路.

这里提出的问题, 不只是邮递员会碰到, 在其他一些场合也会碰到, 如马路上扫地、喷水的车子所走的路线.

4. 蜂房问题. 我们研究与蜂房结构有关的一个数学问题. 从正面看, 蜂房是一个正六边形, 但它并不是一个六棱柱, 它的底部是由三个相同的菱形拼成的 (图 67). 菱形的钝角为 $109°28'$, 锐角为 $70°32'$. 说得更具体些, 拿一支六棱柱的铅笔, 未削之前, 铅笔一端的形状是 $ABCDEF$ 正六角形 (图 68), 通过 AC 一刀切下一角, 把三角形 ABC 搬置 AOC 处, 过 AE, CE 切如此同样两刀, 所堆成的形状就是一个蜂房. 一个蜂巢就是两排这样的蜂房, 底部和底部相接而成.

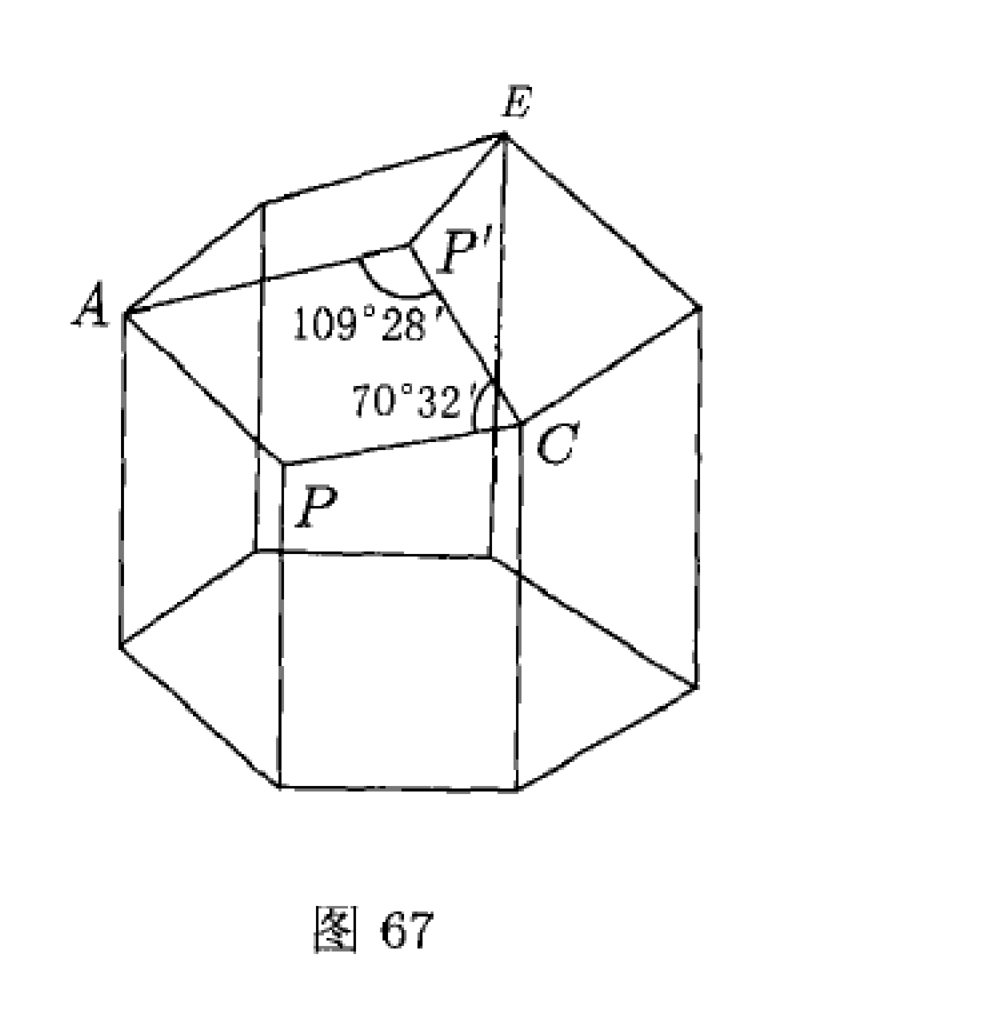


图 67

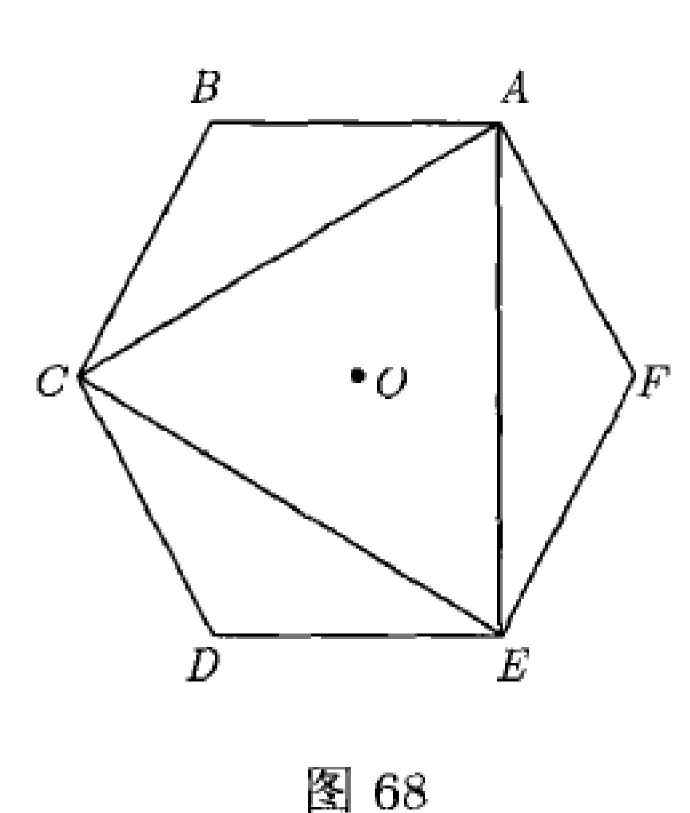


图 68

建造一个蜂房所消耗的材料是与表面积成正比的. 我们问: 怎样切出来使所拼成三个菱形做底的六棱柱的表面积最小.

假定六棱柱边长是 1, 这时 $AC=\sqrt{3}$. 把图 67 的尖顶六棱柱表面分成六份, 把其中之一摊平下来, 得出图 69 的形状. 从宽为 1 的长方形切去一角, 切割处成边 AP, 以 AP 为腰, $\frac{\sqrt{3}}{2}$为高作等腰三角形, 假定被切去的三角形高为 x, 则

$$AP=\sqrt{1+x^2},$$

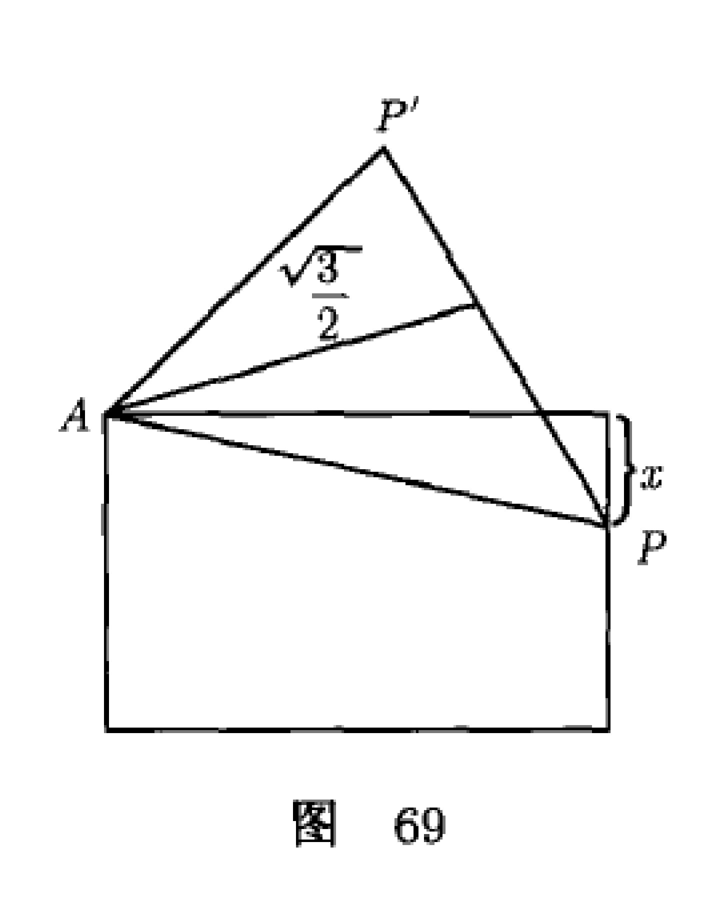


图 69

$$PP' = 2\sqrt{1+x^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{1+4x^2},$$

$\Delta APP'$ 的面积为

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{1+4x^2},$$

所以问题变为求 x, 使

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{1+4x^2}$$

最小.

我们用一个初等方法来求 $f(x)$ 的极小值. 令 $2x = t - \frac{1}{4t}(t>0)$, 则因算术平均 $\geqslant$ 几何平均, 可见

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{4}\left(t-\frac{1}{4t}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(t+\frac{1}{4t}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{4}t + \frac{\sqrt{3}+1}{4}\cdot\frac{1}{4t} \\ &\geqslant 2\sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{4^3}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \end{aligned}$$

而且仅当

$$\frac{\sqrt{3}-1}{4}t = \frac{\sqrt{3}+1}{4}\cdots\frac{1}{4t}$$

时取等号, 这时 $t = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, 而

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{4(1+\sqrt{3})}\right) = \frac{1}{\sqrt{8}},$$

所以, $x = \frac{1}{\sqrt{8}}$ 时, $f(x)$ 取极小值 $\frac{1}{\sqrt{8}}$.

令 $\angle PAP' = \gamma$, 由余弦公式得到

$$2(1+x^2)\cos\gamma = 2(1+x^2) - (1+4x^2) = 1-2x^2,$$

以 $x = \frac{1}{\sqrt{8}}$ 代入得到

$$\cos\gamma = \frac{1+2x^2}{2(1+x^2)} = \frac{3}{8}\Big/\left(1+\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{3},$$

因此得到 $\gamma=70°32'$, 与蜂房的实际角度相一致. 我们进一步问：蜂房是否也具有"在体积一定时表面积最小"的特性?

下面将证明：一个形如蜂房的尖顶六棱柱, 体积 V 为一定时, 表面积 (不算底面) 最小值为 $3\sqrt{2}V^{2/3}$, 而且当六角形边长是 $\sqrt{\dfrac{2}{3}}V^{1/3}$, 高度是 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}V^{1/3}$ 时取最小值.

以边长 a 的正六角形为底, 以 b 为高的六棱柱, 其六个顶点顺次为 $ABCDEF$, 如上述, 过 B(或 D 或 F) 棱 $\dfrac{1}{\sqrt{8}}a$ 处 $\left(\text{假定 } b>\dfrac{1}{\sqrt{8}}a\right)$及 A,C(或 C,E 或 E,A) 作一平面, 切下三个四面体, 反过来堆在顶上, 就得到一个以三个菱形做底的尖顶六棱柱. 易见它的体积 V 和表面积 S 为：

$$V=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2b,$$
$$S=6a\left(b+\frac{1}{\sqrt{8}}\right).$$

我们有

$$S=\frac{4V}{\sqrt{3}a}+\frac{3}{\sqrt{2}}a^2=\frac{2V}{\sqrt{3}a}+\frac{2V}{\sqrt{3}a}+\frac{3}{\sqrt{2}}a^2$$
$$\geqslant 3\left(\frac{2V}{\sqrt{3}a}\cdot\frac{2V}{\sqrt{3}a}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}a^2\right)^{1/3}=3\sqrt{2}V^{2/3},$$

而且仅当

$$\frac{2V}{\sqrt{3}a}=\frac{3}{\sqrt{2}}a^2,\quad a=\sqrt{\frac{2}{3}}V^{1/3}$$

时 S 取最小值, 这时

$$b=\frac{2V}{3\sqrt{3}a^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}V^{1/3}>\frac{a}{\sqrt{8}}.$$

尖顶六棱柱高度为

$$b+\frac{1}{\sqrt{8}}a=\frac{1}{\sqrt{3}}V^{1/3}+\frac{1}{2\sqrt{3}}V^{1/3}.$$

即上述结论得证.

通过实测, 蜂房的大小与上例并不一致$\Bigg($经过实测, $a\doteq 0.35\text{cm}$, 高为 0.70cm, 而按上面的结论, 高应是 $b+\dfrac{1}{\sqrt{8}}a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}a+\dfrac{1}{\sqrt{8}}a=\dfrac{3}{\sqrt{8}}a\doteq 0.38\text{cm}\Bigg)$, 所以蜂房并不具有"在体积一定时表面积最小"的特性. 而密蜂是根据自己身材设计, 用材最少的窠.

附录七　多目标问题

在实际中经常会遇到多目标的问题, 也就是我们要优选一些参数, 使几个目标函数同时都达到较好的水平. 这里我们建议这样一个方法, 在这些指标中, 根据当前的情况, 选择一个优先要考虑的指标作为我们的目标, 而其他的指标希望它不要超出某个界限, 也就是引入一些不等式的约束条件, 这样, 问题就化成单目标的问题了.

有些实际问题可以把多目标问题化为单目标问题. 例如, 用一个关于经济价值的指标把原来关于劳力、各种材料消耗等的指标合为一个.

附录八　重复试验

在得出较好的方案后, 按照这个方案固定所有因素反复做试验有时是必要的, 但可能会得出不完全相同的数据, 对这些数据怎样处理? 如果做的试验次数不太多, 例如只做几个, 十几个或几十个, 可用以下的方法:

把试验数据按次序排列起来

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n,$$

得结论: 就做几次试验的结果来说, 100% 落在范围 $[x_1, x_n]$ 之间, 落在 $[x_2, x_{n-1}]$ 之间的可能性是 $(n-2)/n$ 等等.

如果做的试验次数实在多, 可用以下的方差分析法: 先求平均数

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$$

及方差

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x} - x_i)^2,$$

而结论是: 在 $\left(\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$之间的可能性约为 68%; 在 $\left(\bar{x} - \frac{2S}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{2S}{\sqrt{n}}\right)$ 之间的可能性约为 95% 等等. (**附记**　为什么 S^2 的分母是 $n-1$, 因其分子为

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)^2.$$

这是 $x_1, \cdots, x_n$ 的二次型, 它的方阵

$$I - \frac{1}{n}(1, \cdots, 1)'(1, \cdots, 1)$$

的秩显然为 $n-1$, 也就是实际上 S^2 的分子不是 n 个数的平方和而是 $n-1$ 个数的平方和).

如果得出两种较好的方案, 各自固定所有因素后反复做试验, 可能会各自得出不完全相同的试验数据, 怎样比较这两种方案的优劣? 如果做的试验次数不太多, 则可将所有数据按大小次序排列起来, 按本书第一部分第三章 §9 所介绍的办法来判断. 如果做的试验次数实在多, 可用以下的方差分析法: 若第一种方案做了 n_1 次

试验, 得数据为 $x_{11},\cdots,x_{1n_1}$; 第二种方案做了 n_2 次试验, 得数据为 $x_{21},\cdots,x_{2n_2}$. 分别求平均数

$$\bar{x}_1=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}x_{xi},\quad \bar{x}_2=\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}x_{2i}$$

及方差

$$S_1^2=\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(\bar{x}_1-x_{1i})^2,\quad S_2^2=\frac{1}{n_2-1}\sum_{i=2}^{n_2}(\bar{x}_2-x_{2i})^2.$$

若 $|\bar{x}_2-\bar{x}_1|>1.645\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$, 则约有 90% 的可能性, 这两种方案所得的结果是有差异的; 若

$$|\bar{x}_2-\bar{x}_1|>1.96\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}},$$

则约有 95% 的可能性, 这两种方案所得的结果是有差异的; 等等.

附录九 0-1 变元法

1. 在优选法形成一数学分支之前, 曾有一些方法, 科学根据不太足, 先验地假定某一参数仅在若干个水平中选取, 最简单的是假定在两个水平 (式三个水平) 中选取, 非此即彼. 他们所用的数学工具, 与其说用了连续变元, 不如说是用了 0-1 变元, 即取不取变元, 以两个水平为例, 温度或取 300°C 或取 600°C. 我们不妨说取 300°C 时这变元的值是 1, 不取 300°C 时, 这变元的值是 0. 换变数 $\eta=\dfrac{600-\xi}{600-300}$ 就变为 0-1 变元 η 了. 下面, 我们简略介绍一下, 并且从原则上更提高一些.

一个参数 ξ 限定在 n 个水平

$$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$$

中选取其中之一, 可以用 n 个 0-1 变元 $\xi_1,\cdots,x_n$ 来代表, 这些 $x_1,\cdots,x_n$ 只取值 0 或 1, 而且

$$x_1+\cdots+x_n=1.$$

即 n 个水平中每次只能取一个.

如果某一目标函数 T, 依赖于 k 个参数 $\xi^{(1)},\cdots,\xi^{(k)}$, 而 $\xi^{(i)}$ 有 n_i 个水平

$$\xi_1^{(i)},\cdots,\xi_{n_i}^{(i)},$$

其对应的 0-1 变元 $x_1^{(i)},\cdots,\xi_{n_i}^{(i)}$, 假定其目标函数 T 是最简单的一次模型 (这种假定的可靠性极小),

$$T=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\alpha_j^{(i)}x_j^{(i)}, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n_i}x_j^{(i)}=1,\quad x_j^{(i)}=0\ 或\ 1. \tag{2}$$

用

$$x_{n_i}^{(i)}=1-\sum_{j=1}^{n_j-1}x_j^{(i)}$$

代入 (1) 则得

$$T=\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n_j-1}\alpha_j^{(i)}\cdot x_j^{(i)}+\alpha_{n_j}^{(i)}\left(1-\sum_{j=1}^{n_j-}x_j^{(i)}\right)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \alpha_{n_i}^{(i)} + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_j-1} (\alpha_j^{(i)} - \alpha_{n_j}^{(i)}) x_j^{(i)}. \tag{3}$$

这式子共有 $n_1 + \cdots + n_k - k$ 个独立的 0-1 变元 $x_j^{(i)}$, 但必须适合

$$\sum_{j=1}^{n_j-1} x_j^{(i)} \leqslant 1. \tag{4}$$

在 k 个参数 $\xi^{(1)}$ 中, 每一参数取一个水平的情况做一次试验, 也就是取一个 0-1 变元组 $x_j^{(i)}$, 得出一个 T 来, 做了 N 次试验, 得出 N 个以

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_{n_j}^{(i)}, \quad \alpha_j^{(i)} - \alpha_{n_j}^{(i)} \quad (1 \leqslant i \leqslant k,\ 1 \leqslant j \leqslant n_i - 1) \tag{5}$$

为待定系数的一次联立方程组. 待定系数总共有 $n_1 + \cdots + n_k - k + 1$ 个. 因而做

$$N = n_1 + \cdots + n_k - k + 1 \tag{6}$$

次试验, 就可以从解一次联立方程中得出 (5) 的数值. 但请注意, 我们所做的试验, 要使所用到的行列式不等于 0, 定出 (5) 后, 就用以下的方法判断参数 $\xi^{(i)}$ 该取哪一个水平. 这方法是, 如果对一个参数 $\xi^{(i)}$,

$$\alpha_j^{(i)} - \alpha_{n_i}^{(i)} \quad (j = 1, \cdots, n_i - 1) \tag{7}$$

都是负的, 则取 $x_{n_i}^{(i)} = 1$, 即 $\xi^{(i)}$ 的第 n_i 个水平 $\xi_{n_i}^{(i)}$; 如果不然, 而 (7) 中以 $j = j_0(i)$ 为最大, 则取 $x_{j_0(i)}^{(i)} = 1$, 即取水平 $\xi^{(i)} = \xi_{j_0(i)}^{(i)}$. 因此按模型, T 在

$$\xi^{(1)} = \xi_{j_0(1)}^{(1)}, \cdots, \xi^{(k)} = \xi_{j_0(k)}^{(k)}$$

处取最大值. 因而他们就得出结论, 这一点是目标函数 T 的最优点了. 当然模型是很不可靠的, 因为线性模型是没有最大值的, 有些同志认识到这方法的不可靠性, 把这一点称为有参考性的最优点, 也就是承认了这一方法不属于有收敛性保证的优选法的范围.

2. 为了更明确地说明问题, 我们以每个参数仅取两个水平为例. 例如参数 $\xi^{(i)}$ 只取两个水平 $\xi_1^{(i)}$ 或 $\xi_2^{(i)}$ 之一. 换变数

$$x_i = \frac{\xi_2^{(i)} - \xi^{(i)}}{\xi_2^{(i)} - \xi_1^{(i)}},$$

则当取第一水平 $\xi_1^{(i)}$ 时, $x_i = 1$, 当取第二水平时 (即当不取第一水平时), $x_i = 0$. 如果假定目标函数原来是

$$T = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \xi^{(i)},$$

也就完全等同于目标函数为

$$T = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i$$

的 0-1 变元 x_i 的问题了.

由于基本假定易于失真, 我们就不再烦琐地叙述多种多样选取 $x_i(i=1,\cdots,k)$ 做试验的方法. 更不谈如何用统计方法来分析其试验结果了. 要之, 本方法不但不能保证得到最优点, 甚至于不能保证自己先验预定的 $n_1,\cdots,n_k$ 个点中的最优点.

至于多做几次试验, 即上节中取 $N > n_1+\cdots+n_K-K+1$, 用附录四中所提到的求矩阵的广义逆法来解矛盾方程, 即就更不对头了.

例 1 取 $(x_1,\cdots,x_k)=0,\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_i,\cdots,\boldsymbol{e}_k$, 这里 e_i 是一个 k 维向量, 除第 i 分量是 1 外, 其它诸支量都等于 0, 所对应的 $k+1$ 方阵是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

这一方法对应于从一点出发, 向每一方向都试探一步而后定上升的方向, 很明显这并不比一步一升高的 "瞎子爬山法" 更好些.

例 2 考虑某一配方由三种化学药品所配成, 每种药品所取的用量有三种水平, 混合后加温, 温度也是有三个水平, 这是一个四个参数的问题, 三个参数表示用量, 一个参数表示温度, 因此要求做 $3\times4-4+1=9$ 次试验, 就能定出其线性目标函数, 但这一数学结构易于失真, 所以也就不再讨论这批试验点的安排问题, 更不考虑不分主次, 把所有的因素善同地安排实验的方法了.

参考文献

[1] D. J. Wilde, Optimum seeking methods (1964).

[2] D. J. Wilde, C. S. Beightler, Foundations of optimization (1967).

[3] G. S. G. Bevridge, R. S. Schechter, Optimization: theory and practice (1970).

[4] J. W. Blakenuse, S. H. Davis, Optimization techniques (1964).

[5] M. J. D. Powell, An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives, *Computer J.,* **7** (1964), 155–162

[6] R. Fletcher., M. J. D. Powell, A rapidly convergent descent method for minimization, *Computer J.,* **6** (1963), 163–168.

[7] J. Kiefer, Sequential minimax search for a maximum, *Proc. Amer. Math. Soc.,* **4** (1953), 502–506.

[8] W. Sperdley, Optimization (1969).

[9] A. Lavi, T. P. Vogl, Recent advances in optimization techniques (1966).

1970 年后国内各地出版的优选法文献和推广优选法成果资料汇编已达数百种, 内容丰富, 因总数浩繁, 此处不能一一收录.

附　录

附录 (I) 历程、倡导①

华罗庚引领和指导中国应用数学发展经历了 20 多年.

这个过程是从 1958 年开始的, 最初的探索工作是和王元一起进行的, 本书将简要叙述这个过程, 因为这个过程很重要, 这个过程就是华罗庚在中国探索应用数学的过程, 也是形成他的应用数学观, 应用数学思想、方法论的过程. 一位世界一流的纯粹数学家在一个发展中的国家开展应用数学, 所走的路、所形成的独特思想是珍贵的. 这里我们还要强调一下, 纯粹数学研究与应用数学研究的区别之一也在于此. 纯粹数学研究的道路探索 (对个人而言), 从小学到大学直至研究生, 毕业后进入研究单位, 国内外经过几百年已形成了一个可循的模式, 无论是哪个国家, 无论是科班出身的还是自学成才的, 个人在研究道路上的探索过程基本模式是相同的, 应用数学则不然. 华罗庚探索中国应用数学道路中, 也包括对人才培养的探索. 他曾经想过: 或许应用数学是一门技艺, 是否应当用师傅带徒弟的办法去培养真正的应用数学工作者. 但是他一生的实践, 未能得出结论. 他说他在培养接班人上做了他所能做的一切, 包括捧场在内, 他说看来在于: 理论 + 实践 + 个人悟性的良好结合.

叙述这个过程另一个重要点在于, 华罗庚在普及推广数学方法方面的工作是中国传统文化的一部分, 它又具有世界意义, 被称为百万人的数学. 但从他探索中国应用数学道路上看, 他晚年也觉得在普及推广上花的时间, 精力似乎多了点, 因为这必竟不是他发展中国应用数学的主流, 普及仅是第一步, 他要上第二层次, 但来不及了, 这有社会因素, 也有内在的因素, 他自己十分清楚.

华罗庚说: 他搞双法实际上是抓住了两块敲门砖, 目的在于敲开中国应用数学的大门. 他说: “我在应用数学上的工作, 除了倡导鼓励, 与王元合作之外, 主要是建了一个门: 两个柱子 (双法), 一根横梁 (特征矢量法); 其他也许更重要的是方法论上的体会.” 他希望年轻一代能站在他的肩膀上爬上去, 对于搞应用数学的人, 主要是指在方法论和数学运用的技巧上, 既要能入门, 更要善于从实际中创造许多特殊模型与算法, 这与纯粹数学的细功精巧的要求不同.

什么是数学? 什么是应用数学? 时至今日各家有各家的看法, 我们不去综述评论这些. 华罗庚的应用数学观, 他的分类法, 他在应用数学方面的主攻方向, 他的方

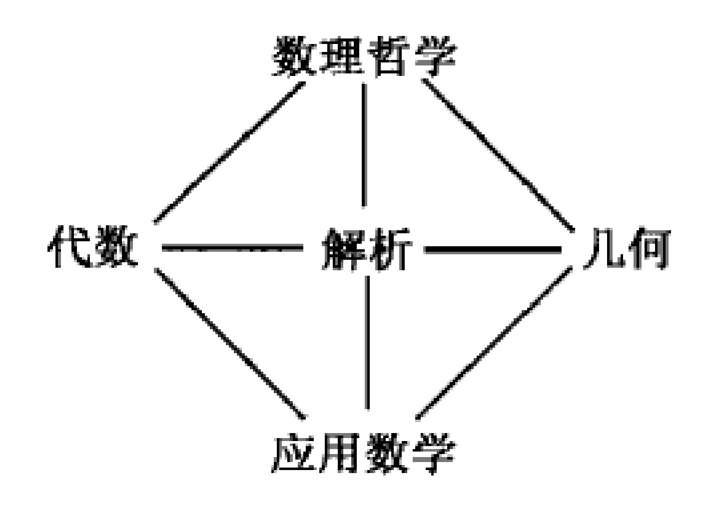
① 摘自王元, 杨德庄. 华罗庚的数学生涯. 科学出版社, 2000.

法论, 对中国应用数学发展将起重要作用. 本书将从 20 世纪 40 年代初期, 华罗庚还在主攻纯数学时期, 对发展中国应用数学的看法写起.

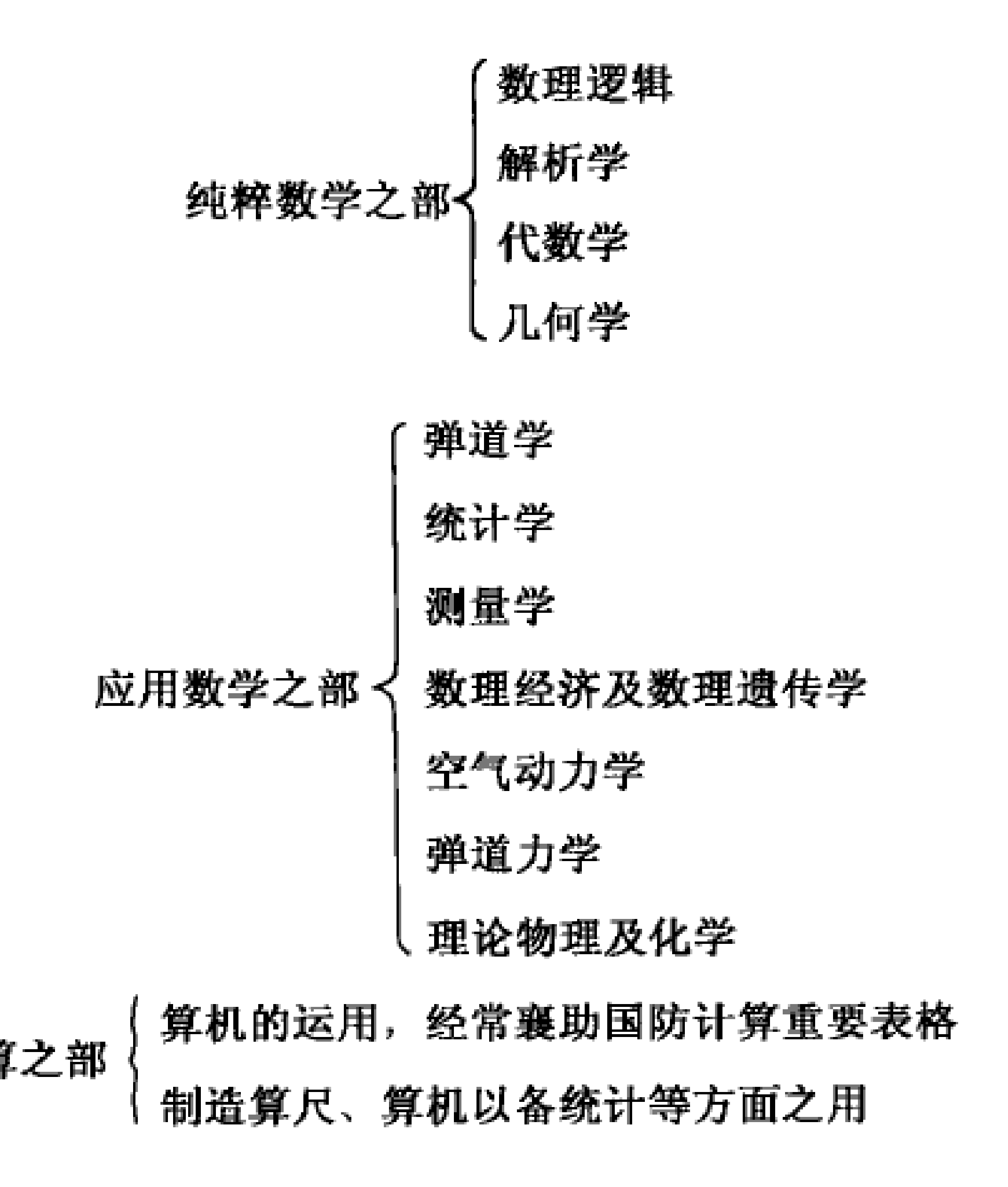
倡　　导

早在 20 世纪 40 年代, 华罗庚就认识到了应用数学的重要性, 并为之呐喊.

华罗庚对应用数学的构思, 始于 40 年代初, 在昆明西南联大时期. 1938 年华罗庚从英国带着第一创造高峰斯的硕果回国, 在西南联大任教授. 又经过几年的奋斗, 在数学王国里, 他已是纯粹数学若干领域世界领袖人物之一, 他站在当时世界数学发展的前沿看中国数学界, 除了自勉要独创更多比西方数学家更"博广与精到"的理论外, 对中国数学的发展已形成"横贯纵通"的构思, 如下图 (见附录):



并提出当时正在筹建的数学研究所应包括: 纯粹数学之部, 应用数学之部和计算之部, 即



此图为华罗庚于 20 世纪 40 年代初期所制, 他的横贯纵通含意一目了然. 数理哲学尽管有不同流派, 对于数学发展的作用具有根本性指导意义.

华罗庚当时就认识到发展应用数学的重要性, 访苏后更激起他重视应用数学, 这是他与众不同的又一方面. 当时他刚刚 30 出头, 年富力强, 在专攻方向节节取胜. 一般人容易满足现状, 满足于在自己熟悉的天地里施展宏图. 华则不然, 他的思路有他必然的奇特性. 这是他行为奇特的基石. 就当时而言, 他不满足作为学术上一方领袖, 总是在考虑自己的学识如何报国 (在当时的时代背景就是为国防服务), 所以, 他非常重视理论与实用的联系. 1944 年他已被安排出国考察, 出国前他在给陈立夫的信中说:"此次出国之目的, 一方面固为广数学方面之见闻, 而他方面, 实为理论及实用谋一联系也. 盖就国防观点以言, 数值计算, 机器计算实为现代立国不可或缺之一项学问, 而我大学之数学课程内容, 大致仍抽象而忽具体, 数值计算往往为不了解者以"容易"二字抹煞之. 因之, 毕业之学生, 坐谈几无一不知, 实算则茫无一策, 以之谋国, 则不啻风马牛, 以之言学术, 则将流为浮夸风焉" (见附录). 真是切中时弊之言!

1946 年, 华罗庚应苏联科学院与苏联对外文化协会的邀请访问了苏联三个月, 他受苏联重视应用数学的启发, 认识有了进一步的提高. 他说:"我几年前, 就曾呼吁过, 我们中国科学要进步, 除去必须注意到理论的研究之外, 还需要注意到理论和应用的配合. 理论如果不和应用配合, 则两相脱节, 而欲求科学发达, 实在是不可能的". "同时我联想起我国将来数学研究所的工作, 似乎不应当只偏重于纯粹数学或纯粹数学的一部分而已" (见附录:"访苏三月记") 在那时的中国, 对应用数学有这样的认识, 可以说是独一无二的.

1952 年, 中国科学院数学研究所成立, 华罗庚被任命为所长, 数学所的框架就是按照华罗庚的上述看法设置的: 除纯粹数学外, 设有力学研究组与电子计算机设计制造组. 这对以后力学与计算技术与算法的发展都起了重要的作用.

这时期华罗庚本人仍在搞纯粹数学, 当时他自己没有时间和精力从事应用数学的研究工作. 这段时间他虽然对 W. Leontief 的"投入产出法"有兴趣, 但那是将它作为一个应用数学的理论来看待, 在讨论班上讲讲引起大家兴趣而已, 并未考虑其实际应用.

从 1946 年到 1957 年, 他一直在强调应用数学的重要性, 希望在他的强调和鼓励之下, 有一部分人去发展应用数学. 也就是说, 在这个时期, 他努力倡导发展应用数学, 主要是想鼓励别人去搞应用数学. 确实, 在他的感召之下, 有一些有才干的人去搞当时人们共认的应用数学分支, 如冯康去搞计算数学, 也有人去搞微分方程和概率统计, 有些人开始看重运筹学.

附录 (II) 应用数学之观点与方法论①

分类观点与评价标准

何谓应用数学? 回答这个问题, 首先要先回答什么是数学? 众所周知, 时至今日, “什么是数学?” 连许多大数学家也说法不一. 历史上的大数学家, 从牛顿算起, 高斯、···、希尔伯特 ··· 直到当今著名的数学家, 他们或创立了数学的基础理论, 给出了数学的许多新思想、新概念、新方法和新技巧, 或发现了数学的许多重要定理, 或提出了数学的许多猜想. 数学家们一代接一代地辛勤劳动, 在构筑的数学大厦上添砖加瓦. 每过去一个世纪这个大厦都添加上一层建筑. 尽管后代对其中的精美赞叹不已, 但当问及他们在干什么时, 他们也未必能说得很明白. 比如, 小平邦彦在晚年写了不少数学杂谈, 有的标题就用 “数学之难以想象”. W. F. Atiyah 也说, 很难给数学或它搞的内容下定义. 当然, 大多数人还是赞同恩格斯的提法, 认为 “数学是研究现实世界中的数量关系和空间形式”. 但是, 人们觉得这个说法太笼统了些. 所以不少学者还在继续深究 “数学是什么?” 有的甚至担心一代一代构筑的数学大厦会不会坍塌. 时间在流逝, 历史发展至今, 人们对数学本质的看法, 主要有三大流派 —— 逻辑主义、直觉主义、形式主义. 逻辑主义认为, 数学真理是与逻辑真理密切相关的; 直觉主义认为, 数学是人类通过智力构造所进行的思维活动; 形式主义认为, 数学是一种按某种规则进行的符号运算所得的结果. 它们都体现了关于数学本质的部分真理, 但又都未能全面地反映数学这一事物. 这说明人类对数学本质的认识还要逐步深化, 这个过程一直还在继续着.

“应用数学是什么?” 自然直接受 “数学是什么?” 的看法 (观点) 的影响. 然而应用数学又有其特殊性, 不同的应用数学观就会有不同的应用数学发展的道路和方向. 这跟纯粹数学是有区别的, 在纯粹数学阵营里, “潮流” 就是导向, 数学家往往会不知不觉地被卷入数学社会的大潮中, 身不由已地 “追星” 起来. 应用数学的工作者, 似乎都可以依靠个人选择的道路与方向, 走比较实际和简明的道路. 当然, 这种选择完全由自己的应用数学观所决定. 数学界长期以来认为, 应用数学就是数学的应用. 最初的数学的应用很清楚, 比如, 牛顿的数学应用于物理力学; 后来 Poincaré的数学应用于天体力学, 另一个例子就是 Riemann 几何为 Einstein 的广义

① 摘自王元, 杨德庄. 华罗庚的数学生涯. 科学出版社, 2000.

相对论提供了基本框架. 这些都是大的应用, 小的应用举不胜举. 华罗庚本人对应用数学的认识也始于数学的应用, 后来他通过自己的实践和他的数学洞察力以及国内外应用数学的发展, 他清楚地认识到, 把应用数学只看成是数学的应用, 或把应用数学看成与纯粹数学没有两样, 都没有全面地反映应用数学这一事物. 但是, 如果也像"什么是数学?"那个问题一样去讨论"什么是应用数学?"那么, 有志于应用数学的数学工作者就不知道自己该做什么, 和怎么做. 因此, 华罗庚提出了应用数学的分类观点. 这种分类观点不但避免了关于什么是应用数学的无休止争论和一些偏激作法, 而且对于每个在应用数学领域里耕耘的工作者, 更能明确自己的方向和位置. 同时由于在不同位置上的工作, 有不同的评价标准, 这也避免了评价上的不公正待遇. 至少数学工作者自己心中有杆称, 不管他人怎么看, 自己的份量自己心中有数, 多少有点自明自慰, 有利于调动搞应用数学的人的积极性和各类型应用数学队伍的形成. 这需要一个过程, 真正的科学工作者不在乎这个过程.

华罗庚把应用数学大致分成三类. 一类是应用数学的基础理论研究, 这类研究与纯粹数学研究在思想与技巧上没有本质差别. 差别在于问题的来源不同, 纯粹数学问题多数来源于数学内部, 而应用数学问题多数来源于数学的外部; 在研究的动力 (目的) 和美学观点上也有些差异. 另一类应用数学研究是数学与别的学科领域的交叉, 相互渗透, 互相促进, 以揭示该学科中重要的数学结构和解决有关问题为目的. 第三类应用数学研究是面向国民经济系统、军事系统和社会发展系统, 以解决这三大系统中提出的现实问题为目标. 他认为在中国这三类研究都很重要, 都有很好的前景. 在当今之中国, 这三类研究力量最弱的是第三类, 而我国国家发展急需大量的这类研究. 因此, 他主张大力发展第三类研究, 以形成中国应用数学的特色.

华罗庚确定他领导的中国应用数学的主攻方向是如上所述的第三类研究. 因为第一、二类的研究与纯碎数学研究在思想和方法上比较相近, 在华罗庚倡导应用数学之后, 已经有一批原来在纯粹数学领域工作的数学工作者转到这上头来了, 一般说来他们都有不错的成绩. 第三类研究具有特殊的难度. 首先它的"问题"来自数学的外部, 是从经济、军事和社会发展三大系统中提出来的"问题", 这种"问题"出现在你面前时还仅仅是一种自然语言的描述, 还远不是一个数学问题, 把它变成数学问题, 需要经过提炼; 难度就出在这种对"问题"的数学提炼与加工上. 数学修养不同的人, 对同一个"问题"的提炼与加工的结果不同. 即使两者都是"高手", 由于他们可能站在不同角度观察同一个"问题", 其结果也不一样. 这种把实际"问题"提炼加工成数学问题, 通常称之为数学建模. 这种建模成功还依赖于能否找到恰如其分的数学概念与表达形式, 以及随后能否找出合适的分析与求解的有效技巧. 这种抽象过程中, 简单性 (simplicity) 与美 (elegance) 获得了绝对的重要性. 还应当着重指出, 不是所有的实际问题, 都可以用现有已知的数学语言去描述它. 原则上讲,

数学的一个重要特征是它的普遍性. 有的数学家说, 一切"问题"都是数学问题; 也有的数学家说, 人类所有知识的每一分支几乎都可用数学来分析. 但是, 把一个活生生的现实"问题"要变成一个数学问题, 做起来是不容易的.

不论是纯粹数学还是应用数学, 问题的提出和解决, 都促进了它们的发展. 纯粹数学家和应用数学家都是面对"问题"工作, 只不过纯粹数学家是面对真正的数学问题, 比如哥德巴赫猜想、费尔马猜想; 而应用数学家面对的是实际问题, 一个还没有转化为数学问题的真实的问题.

严重的现象是, 在数学社会里存在着一种偏见, 人们看重真正的纯粹数学问题, 而轻视从实际问题中提炼出来的数学问题; 更严重的是认为纯粹数学面对的问题需要高智慧的劳动, 而应用数学面对实际问题的研究则不需要. 华罗庚反对这种看法, 而且用自己的实践证明, 面向实际问题的应用数学研究需要很高的智慧能力, 同样显示出很高的创造精神. 当然由于问题的本质不同, 必须对不同质的创造物有不同的评价标准.

另一种偏见是对解决问题的过程持不公正的态度. 纯粹数学中的一些问题的解决过程可以历时 100 年、200 年、300 年, 甚至更长. 人们已经取得共识, 一个问题虽然历时一个世纪、二个世纪未彻底解决, 但它的每一步进展都受到赞誉. 比如费尔马猜想, 历时 300 多年, 人们在奋力解决这个问题的过程中, 引进了许多新的技巧与新的概念. 这些新技巧、新概念正是纯粹数学创新的重要形式, 它们已渗透到大部分数学之中. 应用数学中的问题 (本书中的应用数学主要是指华罗庚的第三类应用数学) 则不允许有这样的时间量度. 倘若你不能在短期内解决你面对的实际问题, 人家就会有非议, 即使你有阶段性的进展, 除了"高手"会赞誉你外, 一般人反而会奚落你. 这种习惯势力, 对应用数学的发展是极不利的. 当然, 应用数学面对这样的实际问题, 本身有时效要求, 你若不能在短期内解决它, 它已变成了另一个问题. 如果再从效益上去评判你的工作, 问题解决不好就已造成了效益上的损失. 这是纯粹数学问题所不存在的, 这也是纯粹数学研究与应用数学研究的重要区别之一.

华罗庚在中国倡导、尝试、试点、普及应用数学的年代, 中国的政治、经济和学术环境都不利于应用数学工作的开展. 这是本书所指的第三类应用数学具有特殊难度的又一个原因. 在这种环境中, 一般数学家即使被迫下厂下乡, 想让数学方法为人民服务, 或想面向实问题, 提取出数学问题, 而后解决这个实际问题, 那是非常困难的事情. 华罗庚选择的主攻方向, 是明知山有虎, 偏向虎山行. 首先他看到这个主攻方向在应用数学中的重要地位, 其次他认为假若他不去闯这条路, 别人就更难了. 他认为他有他的优势, 因此责无旁贷, 毅然在纯粹数学在中国已完成开创性工作后, 决心探索应用数学的新路子. 这条新路的开拓是如此之难, 凭着他的高深学术造诣, 凭着他从 40 年代开始的构思、倡导、尝试和 1958 年开展群众性普及线性规划等

的经验，他完全清楚这条路要先普及后提高，而且多年一直在选择普及技术，在选好普及技术之后 (完全选对了), 在第一次试点时, 半年时间的努力, 基本上失败了. 这件事如果发生在别人身上, 可能的结果是偃旗息鼓而退, 再也不敢试了. 可是华罗庚, 不, 他总结经验教训继续试点. 由于他的普及数学方法的努力, 1975 年以后, 中国的应用数学事业有了新的转机, 有了一个开展工作比较好的基础. 历史应该记下这一笔, 因为年轻数学工作者是不知道这个过程的.

应用数学研究成果的表现形式, 按照华罗庚的分类观点来说：第一类是应用数学的基础理论研究, 它的评价标准与纯粹数学基本上一样; 第二类应用数学研究的成果评价, 要结合交叉学科的评价标准; 第三类应用数学研究成果的主要表现形式是研究报告, 研究报告的核心是数学思想与技巧. 评价这些成果大致从以下几个方面：

(1) 问题的现实重要性;

(2) 问题的难度与复杂度;

(3) 成果产生的效益 (经济的、社会的) 及对科技进步的推动作用;

(4) 一个解决问题好的成果也还具有：构思巧, 思想妙, 方法实用、有效, 文体清楚, 方法技巧简单和易于普及推广, 等等.

在应用数学中, 数学思想与技巧主要指的是把实际问题变为数学问题的建模及其对模型求解的算法思想与技巧. 大多数数学家都认为一种数学模型与算法是创造物, 是一种艺术品, 而纯粹数学研究的成果主要表现形式的核心 —— 定理, 只是发现物. 因此, 华罗庚和许多数学家都认为应用数学研究难也就在于此. 任何在应用数学中的概念、思想与技巧上的创新, 应得到与纯粹数学研究一样的高度评价. 要克服在数学社会中存在的偏见 (认为只有纯粹数学研究才需要高水平的智力劳动, 而应用数学是低水准的, 对数学家是无挑战性的), 只有通过实践给予回答. 华罗庚通过他在真实世界中的应用数学工作, 展示了巨大的创造性和智慧力量.

普及推广型与创造型

运筹学与应用数学有基础理论研究与应用研究之分, 在应用研究中又有普及推广型与创造型之别, 这是华罗庚的观点.

华罗庚把应用数学大致分成三类, 其中第一类侧重于基础理论研究, 而其它两类侧重于应用研究. 这是一种大致的分类, 不是绝对如此. 即使是基础理论研究工作, 也要关心应用前景以及普及推广的可能性; 其它两类研究, 也有基础理论研究的内容, 而且华罗庚一再强调只有理论站得高, 应用研究才能做得好. 在这两类研究中, 人们更容易想到研究成果的普及推广工作. 对于一个好的便于普及的数学技

术, 在一定的时期内组织相当规模的队伍, 去普及推广这种技术, 于国于民是很有益的, 这种应用研究是很有意义的. 华罗庚在中国探索应用数学发展道路时, 第一步就从普及好的数学技术做起, 而且做得很有创造性. 这为中国今后的数学普及工作树立了光辉的榜样. 华罗庚更强调应用研究中的创造性. 在他看来, 没有创造的应用研究就像生命没有灵魂. 所以他的普及工作始终贯穿着创造精神. 对于交叉型的应用研究和面向三大系统 (或说面向实际问题) 的应用研究. 他更强调创造性. 他认为没有创造思维的人是无法进行这类研究的. 因为这类研究面对的只是活生生的实际问题, 而不是数学问题, 这与进行应用基础理论研究和普及推广工作不同, 在进行应用基础理论研究时, 面对的是数学问题, 有一定的数学基础还能进行一定的思考; 在进行普及推广工作时, 手中已掌握一些数学技术, 目的在于把它用好. 因此, 他认为面向实际问题以解决实际问题为目标的应用数学研究, 需要高素质的应用数学人才. 所谓高素质就是具有特殊的创造思维, 很善于从实际问题中创造性建模, 并能给出有效的算法. 在中国开展应用数学的创造型研究和培养能进行这种创造型研究的人才, 这是他探索中国应用数学道路的核心问题. 在中国, 开展普及数学方法的道路的探索, 应该说他成功了. 但花费的时间和精力, 似乎太大了. 与他进行的纯粹数学研究相比, 他并不满意. 他说:“我过去搞纯粹数学, 每过四、五年就能对一门数学略有成就, 现在搞数学应用与普及, 搞了这么多年, 还觉得未入门呢!”这当然还说明应用数学之难.

在这里我们想说一句题外话, 华罗庚对搞应用数学是有很高标准的. 他在许多场合, 特别是文字表述的场合, 都只提自己搞数学应用和数学曾及推广工作, 很少提自己在搞应用数学. 直到 1984 年 3 月, 他在上海教育出版社为他出版的《华罗庚科普著作选集》的首页 ——“感谢”中, 还是这样提法:“在我从事数学普及工作的 30 多年中, ···”, “特别在我从事 ‘优选法’ 与 ‘统筹法’ 推广工作的近 20 年中, ···”. 这使我们更清楚地认识到, 搞应用数学是不容易的.

华罗庚从事的普及推广型工作, “历时 20 年, 走遍了我国 20 多个省、市或自治区, 几百个城市, 几千个工厂, 给数以百万计的工人师傅、技术人员与厂矿领导讲过课”. 这在古今中外是史无前例的. 这种普及推广工作不但为国家为人民创造了大量财富并产生了重大的社会效益, 而且更为重要的是为中国应用数学的发展, 打开了大门, 铺平了道路. 光是破除人们对数学的神秘感的功劳, 就是不可估量的. 许多数学家都清楚地看到, 要开展应用数学研究工作, 首先必须破除人们对它的神秘感, 尤其像在中国这样文化素质很低的国家中开展应用数学工作, 更要先破除人们对数学的神秘感. 华罗庚在中国普及数学方法的开创性工作在国际上引起了极大的反响. 国外数学家评论说:“他拥有威仪的相貌、迷人的个性和丰富的想象力”, “他用惊人的勤奋和 ··· 炽烈的热情, 教育他的人民运用数学”, “全世界没有一位数学家曾经像他这样做过”, “从来没有过一位数学家有他这么多听

众”. 他的数学普及教育思想冲破了中国几千年传统的孔夫子思想, 他普及数学方法, 在学术上洞察之深、选材之妙、加工之巧、表达之深入浅出、行动上之魄力, 足见其是世界上伟大数学家之一. 他为中国普及推广应用数学方法花费了太多的精力.

华罗庚更重视他所认定的应用数学创造型研究. 这是更难的一个层面. 他想先普及后提高, 创造型研究放在第二步进行, 由于他在普及推广型 (第一步) 上花费太多时间与精力, 第二步大力推行, 在他有生之年是来不及了. 但是由于他顽强的创造精神, 还是为我们留下了一个范例. 那就是数理经济方面的研究, 他是面向中国当时实际的经济系统, 对这个实际系统进行调查研究、系统分析, 建立了相应的数学模型并利用数学工具给出了解决这个实际问题的最优策略. 我们已经在第八章详细介绍了这个创造型的应用数学研究工作. 我们说, 华罗庚为我们留下了一个创造型应用数学研究的范例, 是想提醒人们注意, 虽然他研究的经济系统在我国已经成为过去, 他提出的特征矢量法没有发挥太大的效益, 不能像“优选法”和“统筹法”那样进行推广. 但是对一个复杂的经济系统的分析技巧, 解决问题的思路, 为后人树立了范例. 甚至他对那个经济系统最终的最优解的形式与内容都与国内外常见的最优解不同. 这种创造性工作, 正是他所提倡的, 这是他的追求.

这个范例的另一个背景要在这里提及的, 那就是它的产生过程, 因为这个故事本身也很令人深思, 给人以启迪. 事实上, 这个故事在许多文章和专著 (如王元著的《华罗庚》和本书的前面) 都提到过, 简而言之, 华罗庚是在 60 年代初就关注这个问题, 稍后就有了结果, 但在“文革”期间, 所有手稿被“查抄”, 散失殆尽, 后来就没有下落了. 他很痛心, 其它手稿被窃, 他就认了, 唯独这经济方面的工作, 他心放不下. 这正是他对应用数学分类中的第三类的典型工作. 他一直想重新回忆这方面研究. 人所共知, 要想回忆恢复一项过去的工作, 在资料丢失殆尽的情形下, 谈何容易. 再说他普及推广工作量太大, 耗掉了他大量的精力. 直到他心脏病发作, 病倒在医院, 医生不让他工作的情况下. 他把精力集中在两个问题的思考上: 一是中国应用数学路子怎么走, 以当时来说就是普及工作怎么继续往下搞; 二是重新考虑经济系统的最优化问题, 把它重新写出来, 经过艰苦地努力, 他实现了. 这真是拼了命抢回来的研究成果. 1983 年他把这个成果投到《科学通报》, 后来在《科学通报》上全文发表了.

华罗庚对他在经济系统的最优化工作, 看得很重, 在《科学通报》上发表时, 定名为“计划经济大范围最优化的数学理论”. 他曾经对杨德庄说:“一个人的工作有几项, 比如讲有两三项, 在历史上留下来就很了不起. 一个人一辈子发表了几百篇论文、许多著作, 真正能在历史上记一笔的就那么几项, 其它就随风飘了”. 他在谈自己工作时, 在应用数学方面, 就提到了两项: 其一是分圆域方法, 其二就是上面提到的经济系统的工作. 分圆域方法是数论在近似分析上的应用, 后来在交叉学科有

广泛的应用, 但方法论上说, 仍属于纯粹数学的. 这种创造性工作实质上是纯粹数学的创造性工作, 不过它已属于应用数学的范畴. 他认为经济系统方面他所进行的工作是应用数学的创造型工作. 他说从 60 年代初开始, 20 多年来为中国应用数学做的工作, 主要是建了一个“门”.“门”字的两竖杠是两根柱子：一边是“统筹法”, 另一边是“优选法”；“门”的横梁是“特征矢量法”. 可见他把经济系统优化工作看成是提高型的. 在“计划经济大范围最优化的数学理论”的文章中, 他明确指出, 统筹法和优选法可以做为他经济系统优化理论的基本的基础性方法.

华罗庚还特别善于抓住别人工作的创造性要点, 有的连做那个工作的本人都没注意到, 经他一点, 豁然开朗, 认识就上了一个层次, 有的就形成了新的思想.

下面仅举一个实例.

1969 年底开始, 中国科大被迫下迁合肥, 1970 年华罗庚到上海进行第三次试点, 试点成功, 然后逐步形成了普及推广小分队, 在全国各地进行普及推广工作. 70 年以后, 到合肥的人再无法出来参加这种普及推广工作, 迁到合肥后, 中国科大一度归当时的三机部 (航空工业部) 领导, 中国科大的教育革命, 师生下厂接受“再教育”, 只能在合肥或全国三机部工业系统的工厂中进行. 当时也强调理论联系实际, 赶着知识分子“臭老九”下厂. 数学系下厂能干的事就是普及推广“优选法”和“统筹法”, 同时也想探索一下数学的应用. 龚升、杨德庄、陆洪文等一批教员到西安三机部几个大厂, 如红旗公司、庆安公司、黄河公司, 以及闫良的红安公司、耀县的试验基地, 有的人后来还到贵州三线、南昌等地的三机部大厂. 这种广泛的接触实际对应用数学工作者来说是很有好处的 (至少在客观上是如此). 一个偶然的机会, 他们接触到一个非常难的实际问题 —— 电力变压器优化设计问题. 当时是 1975 年初, 实际工作者告诉他们, 我国电力变压器设计还处于手工计算阶段; 设计一台符合国家规定指标的变压器, 需要集中全国最大的几个变压器厂的一批工程技术人员于某地, 对变压器有关参数, 不断地反复地进行调试计算, 经过几个月最后才能找到一组参数值, 满足各项国标要求. 他们说能不能用电子计算机来代替手工计算, 进而能不能再通过计算机计算不但找出了一组参数值, 使变压器各项指标达到国标要求, 而且使变压器造价 (或 10 年变电成本) 最低 (也就是达到优化设计). 人们还告诉他们, 从 1963 年开始, 我国变压器研究所和最大的变压器厂 —— 沈阳变压器厂, 有一批高水平的工程技术人员在研究这个问题, 但尚未成功. 当时他们决定试一试. 这是他们第一次面向一个实际问题, 通过建模求解, 达到解决这个实际问题的目的. 也就是第一次碰到华罗庚应用数学分类观的第三类问题; 过去他们也建过模型, 那都是一些线性规划和农村数学方面的小模型. 为了真实描述变压器各参数所决定的几何形状和各规定的指标, 同时要考虑材料规格限制以及我国工厂生产的工艺水平. 他们完成了建模工作, 但模型非常复杂. 变量既有连续型的, 也有整数型的, 中间计算过程的表达式中, 函数套函数有的达到几十重关系. 用一般

的方法解这样大规模的混合型整数规划问题是不可能实现的. 后来他们用了一个特殊的思想和技巧, 在当时仅有的第一代电子管计算机上实现了求解算法. 所得结果不但完全符合生产工艺要求而且是优化的, 经鉴定认为, 他们创造了一种设计变压器的新方法, 这个新算法在电子计算机上实现了, 在当时是很难得的, 达到了很高水平, 填补了我国电力变压器设计上一个空白. 当他们把这项目研究成果发表的文章送给华罗庚时, 他非常高兴. 1976 年 6 月 24 日, 他给杨德庄写信, 对在变压器优化设计上所取的成果表示祝贺, 信中说:"向你们热烈祝贺, 科大数学系走上毛主席指引的光明大道了."

华罗庚认为这是应用数学创造型研究一个很好的实例. 他说这正是他第二步要开展的应用数学研究工作. 他还说在当时如果大力提倡建模和利用电子计算机, 那是不合适的, 而且对应用数学在中国的开展, 不是促进而是适得其反. 中国当时还处在普及阶段, 只有第一步普及搞好了, 才有第二步的深入、提高. 再说当时电子计算机还很少, 还是稀罕物. 但是他珍惜这种研究, 鼓励人们继续探索, 当他听完杨德庄口头报告后, 他眼睛一亮马上指出, 在当时进行这项研究有以下几个不容易: (1) 建立数学模型不容易; (2) 利用计算机不容易; (3) 用别的目标函数替代原来的目标函数的思想的提出不容易; (4) 根据目标函数特性给出平面对分法的算法不容易.

由此可见, 华罗庚对应用数学创造型研究是久思在心的, 是特别敏感和关注的. 得到华罗庚的肯定和夸奖, 对应用数学工作者来说, 是极大的鼓励, 而且能站在更高的境界总结前面已进行的研究工作, 把"珍珠"留了下来. 以上所说电力变压器优化研究项目, 由于原来的目标函数: 造价或 10 年变电成本 (求其最小) 表达式异常复杂, 给寻找优化方案造成了困难, 为了克服这个困难, 他们通过分析, 找到了一个物理上等价的目标函数 (它不是数学上一一对应的等价), 用它来替代原来的目标函数. 这种替代不影响原问题的本质, 可是由于它的替代后形成的新问题, 在算法研究上发生了质的变化. 问题一下子变得容易求解了. 华罗庚肯定了他们的这种替代思想, 引起了他们自己深思, 并在尔后的应用研究中, 常用此法, 不但用在变动目标函数上, 而且也用在更动约束条件上, 每一次都很成功. 逐渐地他们领悟到了一种思想, 这种思想对于解决面向实际问题的应用数学研究是行之有效的, 他们称这种技巧为更动目标法或更动约束法. 这种技巧与华罗庚最提倡的模型算法一体化思想相配合, 是应用数学创造型研究的有力武器.

数学家常说, 数学既是科学又是艺术, 真与美同样重要, 这主要是对纯粹数学而言; 对纯粹数学, 人们常把它的成果与建筑学 (它也是既是科学又是艺术) 中的建筑物类比, 既要功能好又要求造型美. 对于应用数学来说, 当然也可以这样类比, 但似乎更确切的应该是与军事学 (它也是科学与艺术的结合) 中的战役类比. 这里又得说明应用数学指的是面向实际问题, 以解决实际问题为最终目标的那一类应用

数学. 人们可以从古今中外的战争案例中得到启发, 几千年的战争史, 没有一个军事家去研究任何一场战争如何用一个统一的模式去打. 著名的兵书, 都只谈战略战术的原则, 如孙子兵法十三篇. 所谓名战役都是指出奇着取胜的战役. 这里评价创造性思维, 不是兵书上的教条或套用了以往那个案例, 要的是实效而不是摆什么阵势. 毛泽东的军事思想在创造性与灵活性上达到了一个很高的高峰, 人们从毛泽东指挥过的大量战争中受益匪浅. 反面的案例也是多得很, 人们也可以从中得到启发. 曾格林沁把清军摆成一排一排地冲向侵华帝国主义军队, 面对洋枪洋炮, 白白送死, 多么愚蠢! 如果用毛泽东军事思想 (以消灭敌人有生力量为目标) 来指挥, 你可以绕到敌人背后打它, 或把敌人引入死胡同, 关起门来打狗. 在中国自己大地上进行反侵略战争, 竟然不会灵活地利用地形地貌、天时地利, 岂不可笑!

在用应用数学解决实际问题时, 也是这样: 在数学上拼个高低, 似乎不是聪明的做法; 避开数学上的难点、迂回取胜的做法, 应当受到称赞, 值得提倡, 它是应用数学的一种境界. 创造性思维表现在实效上, 用"简单"、"初等"的办法抓住实际问题的特殊本质, "吃掉"它, 这就是美. 它不在乎于采用什么"理论"、玩什么"花样". 华罗庚强调的应用数学创造性研究, 其创造性和灵活性的含义与纯粹数学研究的创造性, 既有相同的地方又有其特点和独到之处. 在谈到创造性问题时, 华罗庚特别指出在一些人中, 存在奴性和自卑心, 什么都得看外国人怎么说, 看人家眼色, 人家说"是"才算数. 比如他从事应用数学探索工作, 这个工作要从普及做起, 结果引来了四面八方的非议. 这些非议有的是受外来思潮影响的, 说什么大数学家去搞普及, 难以理解. 后来外国人说这种普及工作有创造性, 这是百万人的数学; 人家肯定了, 这些人的心也就平静了. 华罗庚说, 我行我素, 我干我的, 认定方向是对的, 就坚决走下去; 做在我、评在你. 你看他满腔热血、对应用数学的探索多么热忱、自信、独具英雄气概. 不愧为大师、不愧被外国人称为中华民族的民族英雄.

当华罗庚与西方世界隔绝 30 多年, 1979 年第一次出现在欧洲国际学术舞台上时, 西方学术界为之震惊! 当时国内数学界有人担心华罗庚讲数学应用与普及, 没什么可讲; 有的还担心普及的东西水平太低, 影响他的形象. 华罗庚知道自己从事数学普及工作的创造性水准, 他极其自信、他堂堂正正地站在英国、法国、德国、美国、日本 …… 等国家著名的国际学术讲坛上，介绍他如何用折迭纸条的办法给中国大众讲解优选法中的"黄金分割法". 他最后几分钟站的一个讲坛 —— 日本东京大学的讲坛上, 留下的一张珍贵照片, 他手中拿着纸条正在讲解 ……. 这么多国家的数学家在聆听他的普及数学学术报告, 没有一个不折服他的创造性的形象教学法, 以及这种形象教学在中国大众中产生的数学教育的效果. 他们认为"华罗庚站在学者与教师崇高的地位上,……, 他不仅是一位卓越的研究工作领导者, 而且是一位多层次教育的杰出导师".

我们应当树立我们自己的自信心, 发挥自己的创造力; 我们也要善于学习人家

的长处, 继续探索自己应用数学的道路.

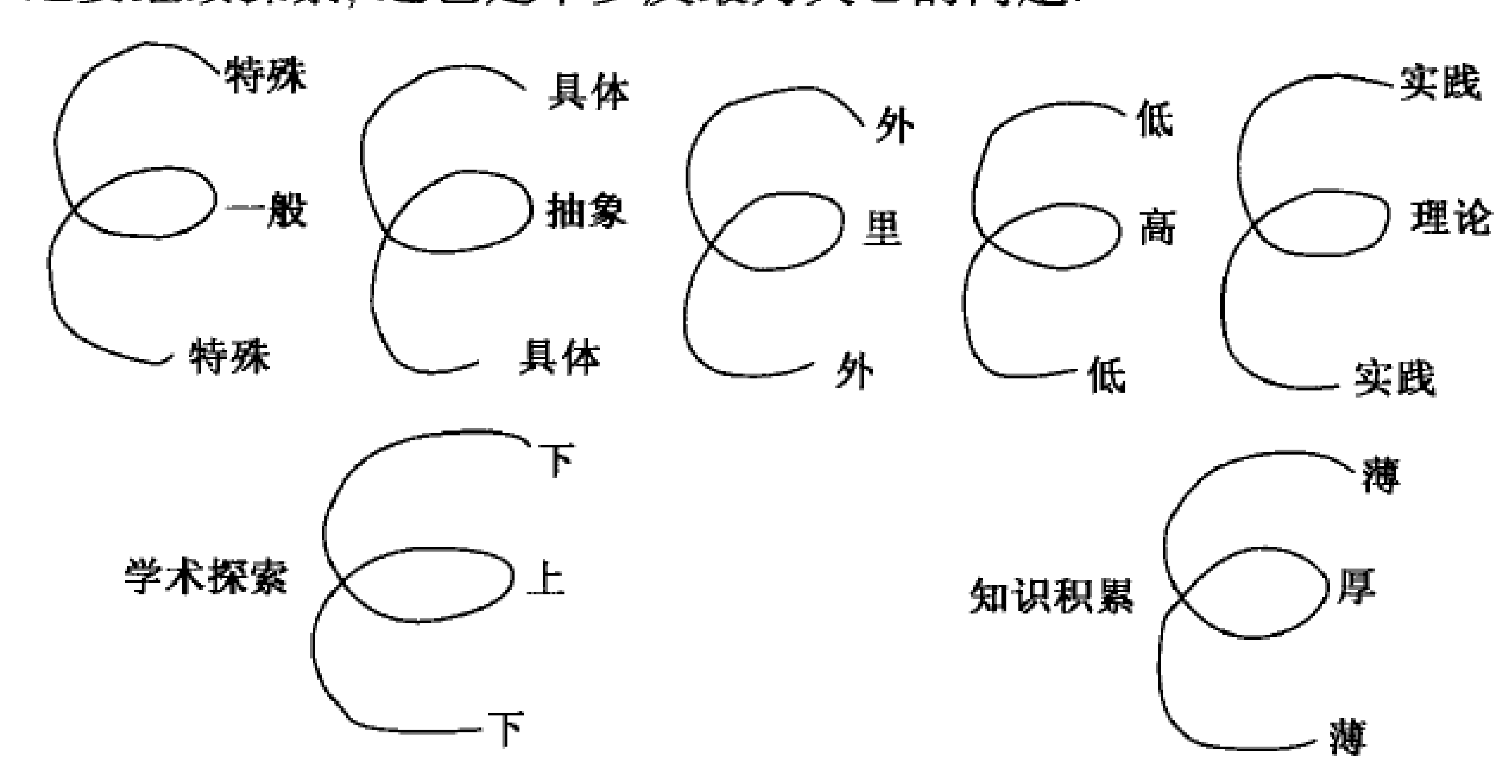
道路、思想与方法

华罗庚对于在中国如何开展应用数学研究, 这条道路怎么开辟, 怎么走? 40 年代有个美好的设想, 他希望有人去干他所罗列的应用数学条目, 结果落空. 50 年代在他受命组建中科院数学所时, 他主张数学所里面应包括计算数学、力学、理论物理等研究室, 希望数学能跟有关学科加强相互间的有机联系; 应用数学能用这种方式先打下基础再发展起来. 这也有利于那些科学的发展, 结果也未能实现. 在制定我国 12 年科学发展规划时, 他又一次强调应用性比较强的数学分支, 如概率统计、微分方程的发展. 当时中国的情况是用"理论联系实际"作为批判旗子, 但谁也不知道怎么"联系"实际, 谁也不知道怎么搞应用数学. 结果反而把一心想发展中国应用数学、而且搞应用数学尝试最多的华罗庚, 贴上不搞应用数学的"标签", 予以批判. 这迫使华罗庚提早"下水"探路, 探索在中国发展应用数学的道路, 他说:"看谁搞的是真正的应用数学?"

本书前面许多地方都提到华罗庚决心探索中国应用数学发展道路后, 遇到了重重困难, 开头真是无从下手. 他和王元到处寻找数学能用得上的问题, 这是一个非常艰苦的过程. 应该说那时在中国大规模地开展应用数学工作, 时机还不成熟. 原因之一是当时数学界对应用数学的认识是很肤浅的, 不知什么是应用数学, 不知怎么搞应用数学. 人们甚至不知道怎么用数学. 当时比较适合为数不多的数学工作者, 开展华罗庚应用数学分类观中的第一、二类应用数学研究; 原因之二是当时社会对应用数学的需求还不够. 应用数学与纯粹数学不同, 纯粹数学的发展有其自身内部的矛盾推动. 应用数学发展除了它的内因外, 非常重要的一点是外界社会的需求推动. 华罗庚选择了普及数学方法做起的正确道路, 即使是这样, 好不容易选择了"统筹方法"作为普及数学第一法, 在第一次试点时, 几十名师生花半年的时间基本上失败了. 这说明难! 在当时这是有风险的! 华罗庚尽管站得高、很自信, 他说他有他的"优势", 毕竟这也是一种冒险行为. 因为社会上人们不认识数学有用, 工厂工人数学文化素质比较低. 你用普通的教学法教他, 他不懂. 所以华罗庚在普及时, 首先要有创造性的教学法. 这只有华罗庚这样到处充满创造精神的数学家才能办到. 第一次试点失败, 华罗庚有魄力进行第二次试点, 这大概也只有他能达到这种境界. 这里他说的"优势"确实起了决定作用. 我们理解他的"优势"就是他从年轻时代起磨炼的品格、学识、顽强拼搏精神和他特具的方法论, 以及他在中国人民心中形成的权威. 如果不是华罗庚而是别人, 也选择从普及数学方法做起的道路, 在当时的中国经济社会发展水平, 此路恐怕难通. 头一次试点一旦失败, 各种非议扑面而来, 一般人是吃不消的.

在世界数学史上, 从纯粹数学家走向应用数学家, 或者既是纯粹数学家又是应用数学家的伟人是极少的. 这样的伟人有一个共同的特点, 就是其方法论的独特性. 有的大数学家, 他完全是纯粹数学家, 他的方法论非常适合于在纯粹数学领域攻坚, 但不太适合搞应用数学, 即使逼着他去搞, 比如二次大战形势逼迫; 又比如中国当时“数学理论联系实际”下厂下乡的强大压力, 他只能屈服去劳动, 但他决不会走上应用数学的道路. 华罗庚的方法特点中适合搞应用数学的有:“华罗庚数学工作的特长是他的初等与直接方法.”(冯康), “一些对华罗庚了解不深的人往往以为他的最大优点是逻辑推导与计算能力强, 其实他最强的数学才能恰好是他的数学直觉.”“华罗庚的另一个特点是先从一个具体而简单的特例着手研究的单刀直入式的研究方式.”(王元), 正是这种方法论上突出的特点:“初等与直接的方法”、极强的“数学直觉”、“从具体而简单的特例着手”、“单刀直入式的研究方式”…… 才正适合于应用数学研究, 成了华罗庚应用数学研究在方法论上的基石. 华罗庚在中国科大设立应用数学系, 进行应用数学人才培养工作的试点. 他希望学生学好数学基础理论, 同时还特别在方法论上给学生以启发. 他的讲课不但深入浅出, 触类旁通, 举一反三, 而且反复告诫学生没弄懂 2 维、3 维的, 就不要跑到 n 维去, 反复强调以下的螺旋式上升的认识辩证关系 (见下页图).

探索应用数学发展, 不同国家有不同的道路; 在同一个国家, 不同的领头人就有不同的道路. 中国的领头人华罗庚 20 多年带领大家走过的是一条特殊的路. 评价他走过的路, 那是后人 (数学史家) 的事情. 毕竟中国由于华罗庚的探索和开拓精神、探索和开拓的不懈努力, 中国的应用数学走出了一条路子, 有了现在的面貌, 为今后的发展铺平了道路. 过去是走过来了, 但只走到现在, 今后怎么走? 今后的路在何方? 还要继续探索, 这也是华罗庚最为关心的问题.



路是人走出来的, 人才 (应用数学人才) 在什么地方? 应用数学的人才又怎么培养. 这也是他关心的另一个重要的问题.

华罗庚对普及数学方法, 经过 20 多年的实践, 已经有了一套比较成功的做法,

包括普及数学方法的人才 (队伍的组成) 的培养. 他认为在他带动下这条路是闯通了, 有待于进一步提高、扩充、巩固, 以求不断的发展. 这是应用数学的一个重要部分, 这种大众数学是应用数学更高层次发展的基础, 应该有一批骨干力量在其中组织、领导, 开展群众性运动.

创造型的应用数学, 更需要探路. 华罗庚希望有人去探路, 他说他在应用数学方面, 除了分圆域方法和建了一个"门"(门的两根门柱子是优选法和统筹方法, 横梁是正特征矢量法) 外, 更多的是道路探索和方法论上的收获体会. 他希望这些收获、体会能给后来探路人以帮助. 一切有志于应用数学的人, 所面临的第一个问题就是选择自己的位置, 确定自己在应用数学的哪类领域中工作, 是侧重于普及型还是侧重于创造型. 不管你在哪个位置, 华罗庚告诫大家: ①每个人应当有自己的阵地; ② 一切都是实力政策. 你必须做出成绩, 显示出水平. 不论别人评价你还是自己对自身的评价, 都是这样的.

探路, 不仅指的是如何发展中国应用数学道路的探索, 而且是指个人如何走应用数学道路的探索, 在个人探索的道路上, 方法论是尤为重要的. 在面向实际问题的应用数学领域里, 当你一个人或一个群体面对一个实际问题时, 你怎样下手, 如何深入, 怎么发挥你已有的数学武器的作用; 怎么从实际问题中提取数学问题, 数学问题怎么求解, 怎么研制算法软件, 计算机上算出来的结果与实际问题相符吗? 如果相符, 你怎么实施, 如何判定实施后的效果. 如果不符, 你怎样从头开始. 假如你面对的实际问题, 非常复杂而且有许多不确定的因素起作用, 用数学去描述它很困难, 你又怎么办? 面对这些问题, 方法论是重要的. 它引导你如何入手, 给你思考问题, 解决问题的总思路、总框架, 或者说大致步骤与程序, 加上各人的理论修养、自身的经验和悟性, 灵活地创造性地应用. 实际问题就可能得到解决.

当代以解决实际问题著称的智囊团都有自己独特的方法论, 比如兰德公司的系统分析方法论、贝尔公司的系统工程方法论 ……, 著名的科学家都有他个人独特的方法论, 这些都生动地展现在他们的传奇传记中. 这里我们不想也不可能全面地阐述华罗庚的方法论. 我们仅对华罗庚在探索中国应用数学发展道路上逐步形成的应用数学方法论, 根据华罗庚在日常工作、生活尤其病在医院中对我们语重心长的教诲和人生漫谈, 以及他一生的言行中, 归纳出几个创新点, 叙述其简要内容.

1. **模型论**

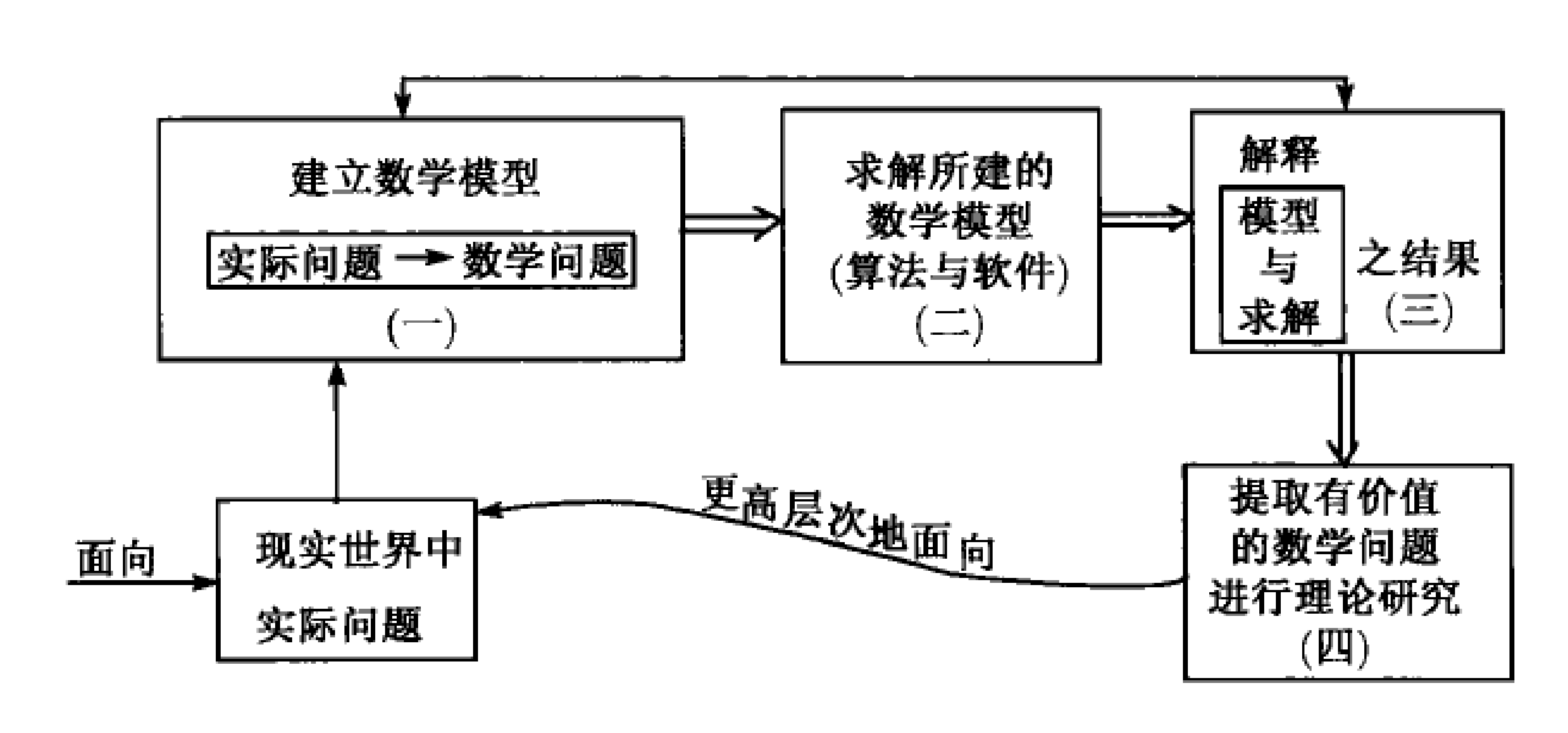
华罗庚赞成这样的观点:"一切问题都是数学问题."“高技术的本质是一种数学技术.”因此, 他对如何把一个实际问题变成数学问题的技术, 也就是建立数学模型的技术, 非常重视. 谁能抓住某项高技术之本质是某种数学技术, 他就给予极高的评价. 在纯粹数学领域, 说某项结果“令人惊奇”或“漂亮的论证”, 那是一种很高的赞誉. 华罗庚对某项高技巧的建模工作, 也常用“漂亮的模型”、“令人惊奇”予

以赞誉. 怎么才能把建模工作做好, 这不是一句话就能解决的事. 在建模之前必须对该实际问题的背景, 物理结构框架、逻辑结构运行框架、关键参数及其关系, 已占有信息进行系统分析. 这首先要进行周密的调查研究. 这种有明确目的之调查研究是建模的关键. 在调查研究的过程, 要善于学习, 学习自己不熟悉的东西; 这就要接触很多外行和同行的专家, 因此要善于团结. 这个过程很艰苦, 纸上谈兵, 蜻蜓点水, 要切忌, 因此, 要实干. 他很赞成建模过程的“泡”和“悟”, “泡”就是深入实际, 把自己思想技巧与实际问题及其背景泡在一起, 与多学科合作者、实际工作者泡在一起, 这有一个艰苦的过程, 才能抓住问题的实质, 反对下车伊始就发言、就建模; “悟”就是在这整个过程中, 不断地去悟出问题的特性、解决问题的真谛.

既然一切问题或者说一切事物都有其数学结构, 那么作为应用数学工作者为了解决这些问题, 就要善于抓住这些问题的本质, 描述其数学结构, 建立其数学模型. 换言之, 一切问题都有其数学模型, 要解决我们所关心的某个问题, 首先就要对它建模. 这就是华罗庚的模型论.

当然世间事物千差万别, 有结构化问题, 也有非结构化问题; 有肯定型的, 也有非肯定型的; 有精确决策, 也有模糊决策; 有静态的, 也有动态的; 有连续变量的, 也有离散变量的;……, 但不管怎样, 总可以用某种方式去建立数学模型.

2. 模型算法一体化、“四步”→“五步”→“四步”



前“四步”方法论

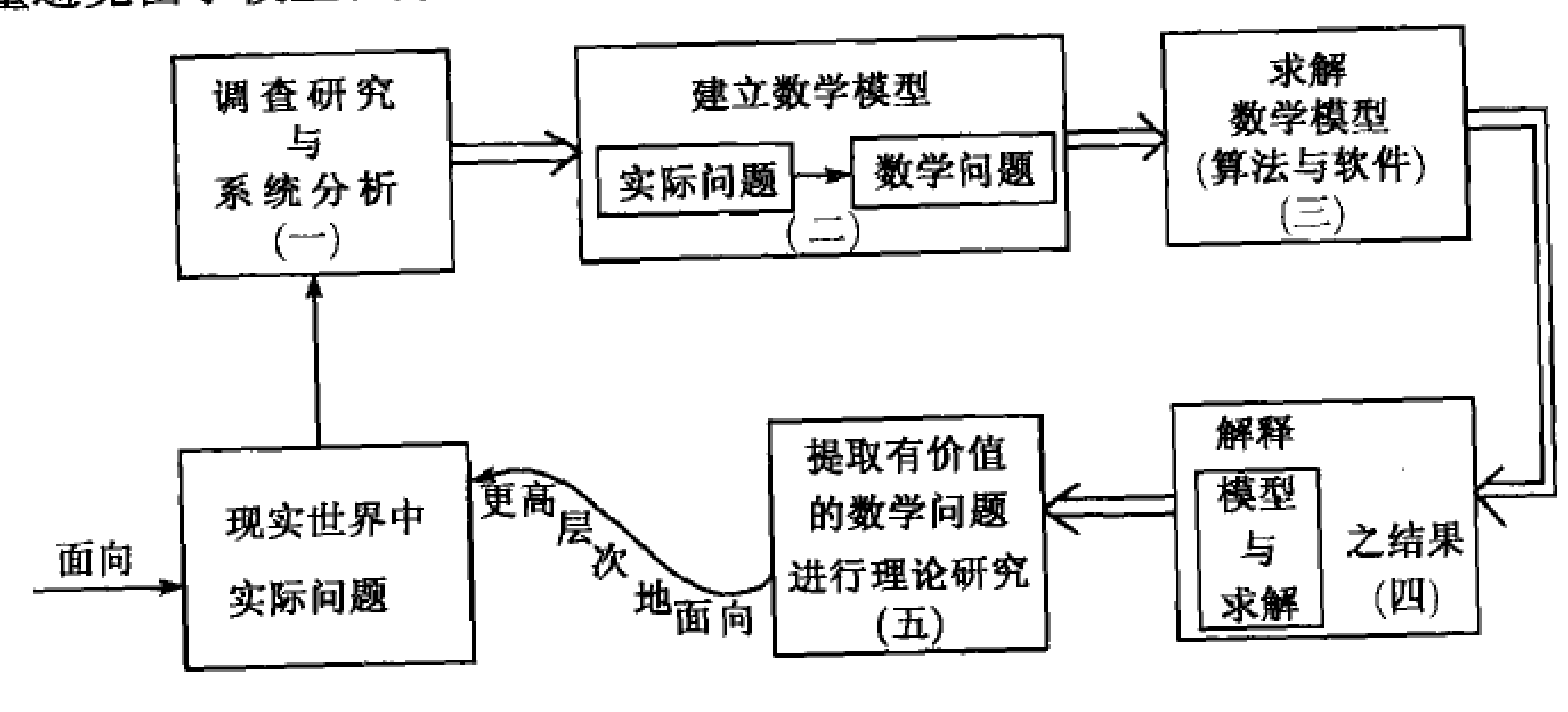
有位著名应用数学家在长期的解决实际问题的过程中, 总结出了一套解决实际问题的方法论, 称“四步”方法论. 华罗庚很赞赏这位应用数学家的“四步”, 以上已经说明华罗庚很重视建模的过程, 认为这是解决问题之关键. 因此, 他在“四步”的基础上加上一步, 形成了“五步”方法论. 这加上的一步叫做调查研究和系统分析, 加在建立数学模型之前. 他强调这一步的重要性, 认为一切产生于调查研究之后, 数学模型建立的好坏, 关键在于这一步, 在于调查研究和系统分析.

我们在华罗庚指导下经过长期的研究与实践, 在方法论上, 又把"四步"或"五步"中的建立数学模型与求解算法合成一步, 这样把两步合成一步统一为一体的思考, 提高了建立数学模型的创造性, 称之为

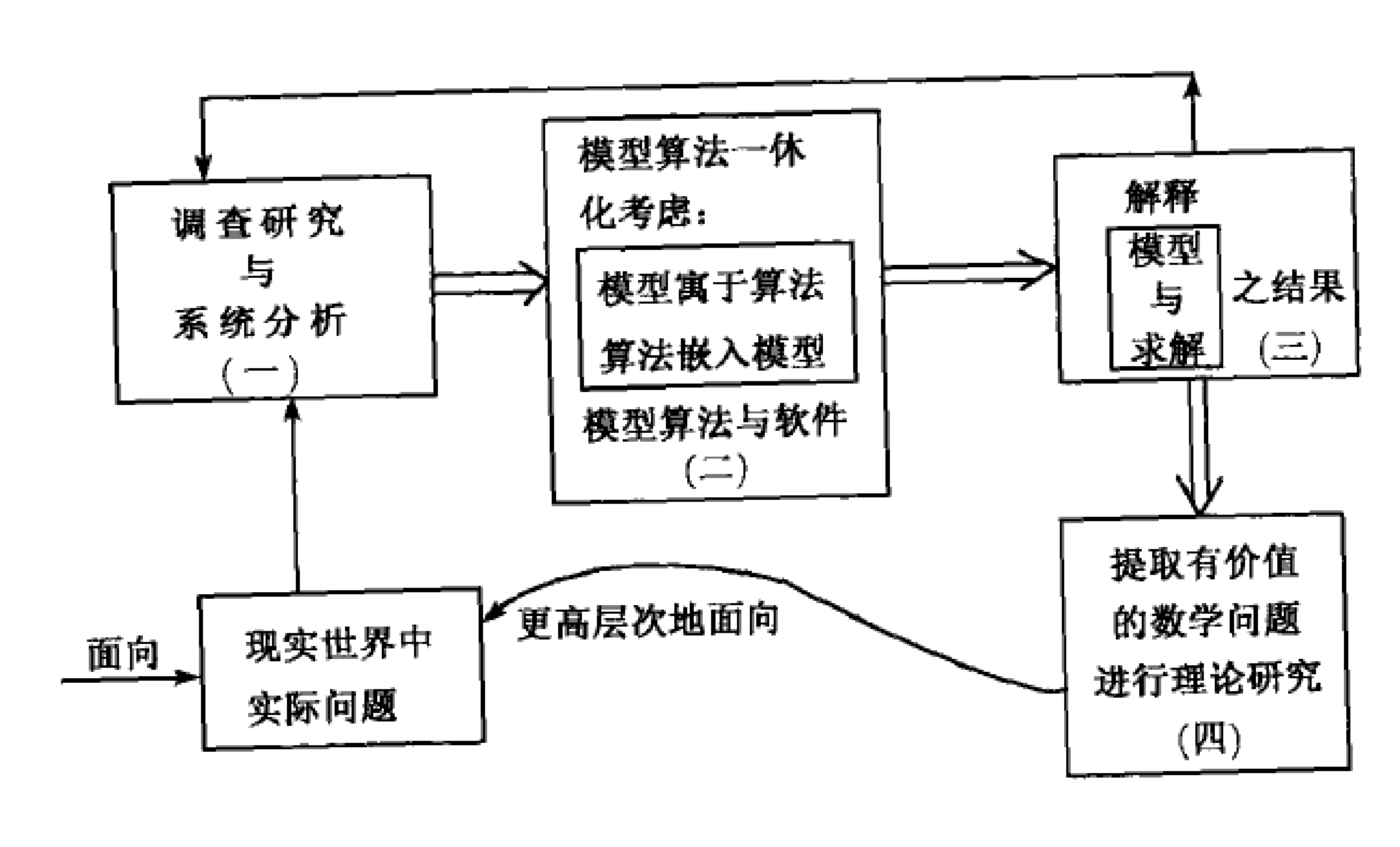
"模型寓于算法, 算法嵌入模型."

这种思想方法的重要性在于:

(1) 避免了模型与算法分离造成的算法研究的被动和难度. 同一个实际问题可以建立许多不同的模型, 按自然语言翻译成数学语言的建模工作, 仅是描述而无目的性, 属于初级建模, 它给算法研究带来被动, 往往难以求解或无法求解. "新手"多属此类, 由于无法求解的困惑, 人们常常会灰心退缩. 模型算法一体化的思考, 可以尽量避免由于模型和算法分离造成的算法研究的被动.



"五步"方法论



后"四步方法论"

(2) 拿现成模型去套问题, 这又是"新手"的通病, 加上急于求成, 更易患此病. 新的思路就可以避免之.

(3) 可以避免建模工作中的先入为主的毛病, 建成模型后如果不适用, 一般人很难重建, 缺乏经验的新手, 易陷入绝境, 即如果只顾用数学语言描述问题, 这样的模型一旦在脑中先入主, 很难自拔.

(4) 模型算法统一为一体的思考方法, 是以解决实际问题为最终目标的, 为了解决实际问题, 建模者不但要充分调动自身的知识库和方法库, 还要善于学习, 向实际学习, 向别的学科学习, 利于自身技能的提高和多学科之间的协作以及知识的交叉与综合.

(5) 模型算法统一为一体的思考, 更能做到: 抓住问题特殊性, 建立特殊模型, 给出特殊算法, 问题解决得更加有效.

(6) 新的建模思想集中体现了数学思想与技巧在应用数学中的运用, 同时也是应用数学美学观点的集中体现 (如同纯粹数学). 便于提高应用研究队伍的技能, 提高其对应用数学的兴趣, 培养其数觉, 数觉是小平邦彦提出来的. 纯粹数学和应用数学研究都强调数觉, 应用数学研究也许更应强调数觉, 因为大多数应用数学是属于直觉主义流派.

3. *更动目标函数或约束条件的思想*

从应用数学的基础理论研究角度考虑问题, 它关心优化数学模型的一般理论与方法的研究. 比如, 线性规划的一般理论和算法的研究 (诸如单纯形算法、Karmarkar 算法等等), 以及非线性规划的一般理论和算法的探索. 他们认为既然有了线性与非线性的一般数学模型, 数学工作者的任务就是研究其一般算法. 这种从一般性、普遍性的角度去研究事物是非常重要的, 这是人类认识世界的重要方式.

从应用数学的应用研究角度考虑问题, 它直接面向实际问题, 最终目标是解决实际问题. 它更关心实际问题的特殊性, 这也是人类认识世界的重要方式. 当然人们很希望有一般理论与方法能套用在该问题的解决上 (这是求之不得的好事). 但是, 往往一般理论和方法还处于初级阶段, 还远不能适应这种需求. 在这种情况下, 先去追求一般理论和方法的研究, 再用它去解决实际问题, 这种途径, 一般说来是不科学的、不现实的; 另一种途径就是特殊问题特殊解决, 寻求具体问题具体分析的做法, 建立特殊模型, 给出特殊算法, 尤其是模型与算法一起考虑的思路.

实际问题往往非常复杂, 对其了解、分析透彻的, 可以走模型与算法合二而一的途径, 普通研究者还不能完全做到这点. 模型既要不失真, 又要有特殊算法与其配合, 这非常难! 因此, 以自己最好的方式完成建模后, 往往还需要进一步研究算法, 此时有两条路子, 其一是循规蹈矩的数学化研究; 其二是灵活的数学化研究.

灵活的数学化研究, 就是根据问题的特性采用特殊的数学技巧, 适当地改变其目标函数或约束条件, 既不使改变后的模型失真, 又使改变后的数模具有特殊的算法. 其背景是: 一个实际问题有很多数学模型, 而这些数模的最优解是一样的. 这很多个数模中有一类 (或一个) 是与自己已建立的数模在目标与约束上具有大致相同的形式, 只在目标或约束上, 稍有区别. 但正是这样稍有区别之别, 往往给我们解决问题带来转机, 能够形成特殊算法. 循规蹈矩的数学化研究, 实际上是完全受缚于已建立的数学模型的目标函数和约束条件. 这种固定模型的严格化处理, 可能是无路可通的.

人们在认识上往往受传统习惯势力的限制, 面对一个实际问题, 通过一定分析得到了描述它的数学模型. 现在需要求解它! 人们的目光一下子完全集中在求解自己建立的这个特定的模型上, 比试水平的高低, 完全看你有没有办法求解自己建立的特定模型上 (自己给自己出的难题上!). 在一个群体在一起工作时, 会出现这样的情况, 大家都只顾自己的面子, 千方百计想法求解所建的模型, 似乎说连这样的模型都无法求解, 自己的数学水平也太低了. 有的人甚至会说作为一个数学难题, 我也要把它攻下来. 这时很少有人提出能不能动一下模型. 至少可以问一下: 模型建得好吗? 有没有别的建法? 这可以看出, 应用研究如果跳不出纯粹数学的圈子, 思路会受到很大的束缚, 就连自己最根本的目标 —— 解决实际问题, 都忘了.

从最终目标是为了解决实际问题看, 当你面对一个实际问题时, 最初, 既无数模也无算法. 理论上讲, 对这个实际问题, 可以建立很多个数学模型, 人类掌握了很多方法. 人们走的是这样的一条路: 一旦建立了数模, 就试图从人类掌握的 (或者说自己掌握) 的方法库中寻求一种求解方法. 这就固定模型寻求求解方法. 人们几乎都走这条路. 除了上面提到的传统习惯的影响原因外, 从实际问题中提取数学模型非常难, 也是重要原因. 人们一般不敢轻易更动自己辛辛苦苦建的数模, 一旦更动易造成失真.

我们从模型、算法固定和变动的四种形式组合上分析一下, 也许能看得更清楚些:

(1) 定模动法, 这就是以上刚提到的, 模型固定了再去寻求求解算法的做法, 人们常走的路子.

(2) 定模定法, 人们手中掌握固定的方法, 去寻找能用此定法解决的实际问题的特定模型. 即只有在实际问题必能建立此法生效的特定模型时, 此路才通. 普及数学方法时就是如此.

(3) 动模定法, 只有当面对的实际问题形成的数学模型、更动后既不失真, 又可以用手中掌握的固定方法去解决时才有效. 普及数学方法时也常遇到这种情形.

(4) 动模动法, 这是说当面对的实际问题形成的数学模型, 只有通过更动模型 (目标或约束), 才能在自己掌握的方法库中找到一个方法或创造性地提出一个新方

法与这个更动的模型相匹配, 它恰是解这个更动模型的好方法.

这种更动目标函数或约束条件, 或两者同时更动的方法, 我们称之更动目标约束法. 实践证明, 它是非常有效的.

4. 要充分认识比定理更重要的东西

纯粹数学的进步在于各种创新工作的突然出现, 而创新是各式各样的, 比如新的概念和新的技巧在解决某个纯粹数学问题时的突破, 这些突破性的成果又以新的概念和新定理的形式出现在令人兴奋的论文中.

以解决实际问题为目标的应用数学研究, 与纯粹数学不完全相同, 它的突破性成果往往不是以定理形式出现, 而是解决问题的思想、技巧形成的一些原理、原则、算法, 这些原理、原则、算法常常不是出现在论文中, 而是出现在研究报告中. 事实上, 在纯粹数学研究中, 一些原理、原则、算法也比定理还重要, 比如鸽巢原理 (抽屉原则), 多少数学家用它解决过不知多少难题; 又比如归纳法, 那是一种算法式的证明程序, 它为数学家解决的难题数不胜数. 应用数学研究中除了运用纯粹数学的原理、原则、算法外, 还有它自己特有的原理、原则、算法. 比如, 动态规划中的最优化原理; 求解整数规划中常用一种算法技巧 —— 分支定界原理, 这是众所周知的. 在应用数学研究中, 像模型算法一体化思想、更动目标约束思想, 如同以上提到的原理、原则一样, 它是一种思想. 但有这种思想和没有这种思想, 在解决实际问题时是不大一样的. 思想、原理、原则, 它的具体应用完全在于使用者的技艺和灵活性, 如同一个棋手的下棋艺术, 一个外科医生“一把刀”的使刀技巧.

华罗庚在中国探索并发展应用数学时, 希望中国的应用数学研究要有自己特殊的思想风格. 中国古代数学就有其独特的体系和独特的表现方式. 西方的欧几里得体系着重抽象概念与逻辑思维以及概念与概念之间的逻辑关系. 我国的传统数学则不同, 它基本上是一种从实际问题出发, 经过分析提高而提炼出一般的原理、原则与方法以最终达到解决一大类问题的体系. 这种体系也十分完整与严密, 形成了特殊的思想风格.

这里必须说明两点:

(1) 西方的欧几里得体系在世界数学发展史上占着极其重要的地位, 至今仍是基石, 它建立了一整套世界各国公认的, 抽象、严格的逻辑证明体系, 推动着纯粹数学各个分支的发展. 在东方, 古代中国数学发展走了另一条路子, 长期以来人们清楚地分析了这条路子给中国数学发展带来的负面影响、甚至十分痛惜. 以上叙述不过想强调一下中国古代数学发展中也有其精华部分, 我们要肯定它、继承发扬它, 尤其对于应用数学更是如此. 在当今计算手段高速发展的信息时代, 人们要用数学去解决许许多多实际问题. 面对这些实际问题时, 中国古代的数学思路与当代数学思想之结合, 是十分有益的.

(2) 在中国, 应用数学的发展, 从道路上讲, 比纯粹数学更艰难些. 人们对它的认识有相当大的误区, 甚至出现两个极端片面看法: 一种认为应用数学太简单、没什么思想、不值一搞; 另一种认为应用数学要解决实实在在的实际问题, 太辛苦太困难了, 不如搞理论花得来. 还有, 在纯粹数学中公认的东西, 在应用数学中出现, 人们不一定认可, 即使认可, 份量也轻得多. 前面提到的“原理”、“原则”、“算法”程序, 就是一例. 这些东西出现在纯粹数学中, 人们视之为宝贵思想; 出现在应用数学中, 就不以为然了. 这就不利于正确评价应用数学工作, 也就影响了人们投身应用数学的积极性, 影响了应用数学的发展.

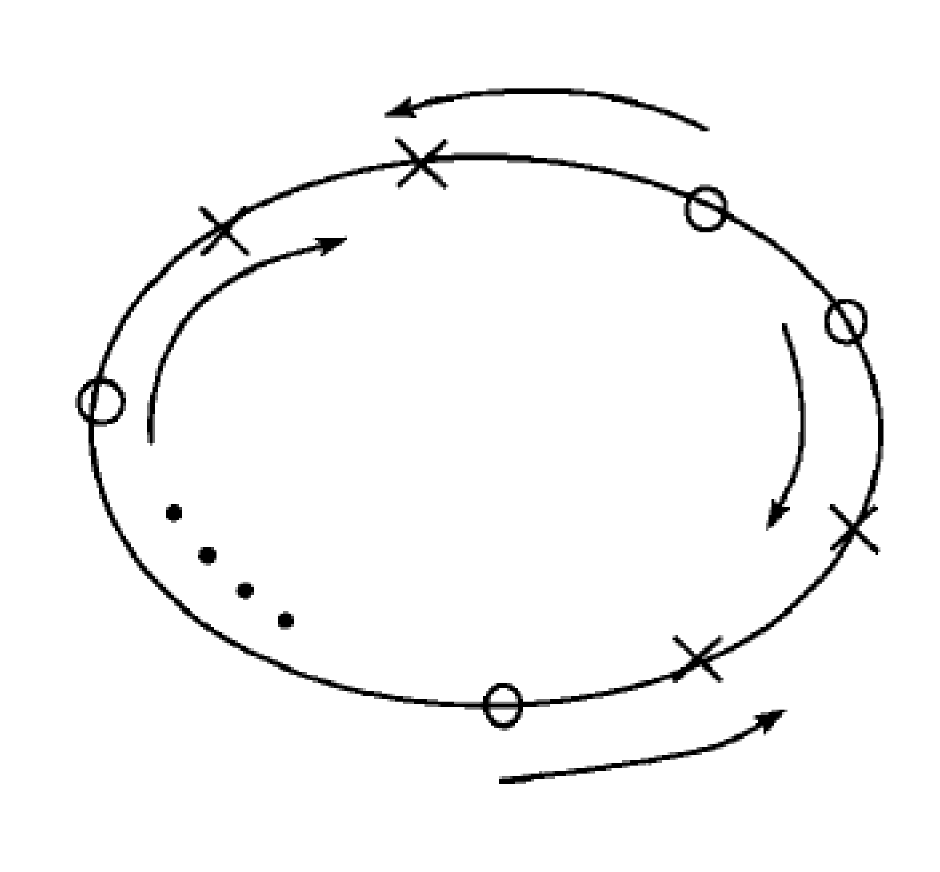
更动目标、约束思想, 是在某种意义下寻求等价的另一种数学模型, 以便更灵活地寻求其求解算法的另一种途径. 数学上完全严格的等价形式, 在纯粹数学研究和应用数学基础理论研究中是常见的. 但从应用研究角度看, 人们的目的在于解决实际问题. 因此, 我们视“等价”一词有更广泛的含义. 这正如 G. B. Dantzig 所说:“许多现实问题的提法, 带有某种柔性 (softness), 即缺乏精确性, 这就允许它们有许多等价的数学表达方式; 我们所说的等价, 并不是数学中一一对应意义之下的等价, 而是指在应用目的方面的等价. 从人们寻求解答的观点来看, 问题的一种提法恰巧与另一种提法同样令人满意, 但也可能一种提法可用数学方法进行分析和求解, 另一种却无望用数学方法解决.” 而我们提出的更动目标约束法提供了数学与实际结合的更广泛意义的等价含义.

5. 模型算法一体化思想、更动目标约束思想的一些实例.

(1) 模型算法一体化思想在应用数学好的模型和算法中, 得到了充分的体现, 只不过人们没有像华罗庚那样认识它、抓住它. 以下是些实例:

① 图上作业法.

1958 年, 中国曾普及推广一种特殊的应用数学和运筹的方法, 就是中国独创的运输问题的图上作业法. 模型就是在交通运输示意图上, 标好需要调运的某物资的收发地点及收发数量.



如果道路不成圈, 按口诀“抓各端、各端供需归邻站”办, 就得最优方案.

如果道路有圈, 则先在图上做流向图. 所谓流向, 就是从发点到收点间的货运方向. 统一规定, 从发点到收点的路线右旁画一条带箭头的线. 按以下口诀办也就

能得最优解. 口诀:

流向画右旁, 对流不应当;
里圈与外圈, 不超半圈长.

如果不满足口诀, 就在图上调整, 故称图上作业法.

这是一个模型算法一体化的典型实例. 它有一般的模型, 那是一个线性规划模型.

设有 m 个发点, 各有 a_i 单位物资 $(i=1,2,\cdots,m)$; n 个收点, 各收 b_j 单位物资 $(j=1,2,\cdots,n)$. 从第 i 个发点到第 j 个收点的距离为 d_{ij}(公里), 且 $\sum\limits_{i=1}^{m}a_i=\sum\limits_{j=1}^{n}b_j$. 请给出最好调运方案, 使总运输力最省?

假设从第 i 发点运往第 j 收点的物资最为 x_{ij}, 那么这个运输问题的一般数学模型为

$$\min\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_{ij}x_{xj}$$

$$\text{s.t}\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\\ x_{ij}\geqslant 0, i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,n.\end{cases}$$

它可以用线性规划的一般算法求解.

② 中国邮路问题

邮递员从邮局出发, 跑遍他所负责的投递街巷, 把邮件和报纸送到居民手中, 然后回到邮局. 问他该怎么选择路线, 才能使走的总路程最短?

这个问题的一般数学模型是一个特殊的线性规划问题.

根据问题的特性, 管梅谷提出了一个模型算法一体化的方法, 称奇偶点图上作业法. 国外文献上称之为“中国邮递员问题”. 华罗庚很赞赏管梅谷的贡献, 称他为“山东第一条好汉”.

③ 统筹方法

统筹问题中的模型算法一体化就不必重复了. 本书在前面已经把它的模型与算法详细讨论过.

④ 优化问题中的许多好算法, 仔细琢磨一下, 也都是模型算法一体化的, 比如线性规划的三个主要算法. 线性规划的一般模型是

$$\max(\min)\quad c^T x$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} Ax \leqslant b \\ x \geqslant 0. \end{cases}$$

G.B. Dantzig 为了给出单纯形法, 他把线性规划的不等式约束, 变化成他的标准模型 —— 等式约束. 只有在等式约束的模型上, 才能施行他的单纯形算法.

L. Khachian 的椭球算法的标准型是严格不等式; N. Karmarkar 算法的标准型不但要求是等式约束, 还有更多的其他条件.

不过, 这些是理论上追求的算法, 它的模型算法一体化与从实际问题中建模达到模型算法一体化, 是不完全一样的.

⑤ 基于模型算法一体化思想的一种新的线性规划算法.

这个新算法发表在《中国科学》1998, 第 28 卷第 1 期. 众所周知, 线性规划已有三个主要算法: 1947 年 G. B. Dantzig 提出了单纯形算法, 经过四分之一世纪的实际应用, 效果不错. 但在 1971 年, V. Klee 和 G. L. Minty 给出一个例子, 说明单纯形算法不是多项式时间算法. 1979 年 L. G. Khachian 给出线性规划的第二个主要算法, 即椭球算法. 椭球算法是一个多项式时间算法; 这在理论上证明了线性规划存在多项式时间算法. 但是, 椭球算法在应用上是实际不可行的. 1984 年 N. K. Karmarkar 给出了第三个线规划的主要算法 —— 投影尺度法, 它也是一个多项式时间算法, 在实际应用上, 它正在与单纯形法竞争, 一比高低, 但至今也未能下最后的结论. 当 1979 年 L. G. Khachian 的椭球算法和 1984 年 N. K. Karmarkar 算法出现时, 都曾经轰动世界. 1984 年华罗庚根据他的深邃的数学直觉, 曾推测说: "线性规划可能存在一个非常简单、非常初等的算法". 也就是说, 已出现的线性规划的算法, 都还不是最好的算法, 人们还应当继续寻求线性规划的新算法. 无独有偶, 1998 年, S. Smale 为世界 21 世纪数学发展提出了 18 个问题, 其中第 9 问题就是线性规划问题. 看来, 线性规划新算法的研究在 21 世纪初可能会掀起一个高潮.

这里叙述的线性规划的新算法, 是寻求线性规划有效算法的一种尝试. 它在构思上的特点是基于模型算法一体化思想, 也可以说是在模型算法一体化思想引导下进行理论探讨的一项成果. 前面我们一再强调模型算法一体化思想, 对于面向实际问题以解决实际问题为目标的研究更为有效. 这里是进一步说明在理论研究上, 这种思想也是有效的. 这种算法的另一个特点是它的核心算法, 既简单又初等, 有效地利用黄金分割法、二分法及其它简单计算方法. 这种算法的第三个特点是无需矩阵求逆计算. 线性规划三个主要算法中有实际应用价值的是单线形法与 Karmarkar 算法, 这两个算法的基本运算就是大型矩阵求逆, 计算量之大是容易看出来的. 由于无需矩阵求逆计算, 因此迭代过程中, 不破坏原始方程系数, 始终保持原始系数矩阵. 计算误差 (累积误差) 小, 精确度也就比较高, 这点也优于单纯形法和 Karmarkar 算法. 在单纯形法和 Karmarkar 算法中, 由于不断求逆迭代, 误差很大, 容易引起

失真.

还有两个特点也值得一提, 其一是对于实际问题, 在运行中的线性规划系统, 本身就有一系列可行解. 这些可行解对于采用单纯形算法和 Karmarkar 算法的优化过程是没有用的. 可是对于我们的新算法, 这些可行解就非常有用. 其二是从理论上说, 最初的若干可行解如何获取, 一般来说, 这些可行解的获取也只有像单纯形法和 Karmarkar 算法一样, 采用大 M 法或二段法. 但是我们给出了另一种求最初若干可行解的新算法, 这就是基于更动约束法的新椭球算法. 这种新椭球算法在下面我们马上就要提到.

新的线性规划算法的意义在于它是面对现实线性规划的算法, 而不是主要在数学上的新算法. 现实线性规划问题, 由于它是客观运行的, 它已有可行解, 这些可行解对于已有的别的算法是没有用的. 已有的那些算法必须用数学的方法, 从它建立的模型 (线性规划模型) 中通过算法自身运算产生第一个可行解, 有人估量从模型自身到第一个可行解的得到所花的计算量, 大约是算法起动到获得最优解全部计算量的一半. 客观运行的已有的可行解对新的算法是可用的. 这就大大节省了初始计算量. 另外, 现实的线性规划问题, 寻求的是得到比现在运行的方案好的方案, 而不必是最优方案. 逐步改善的方案是人们所希望的, 一步登天的方案往往是不现实的. 新的算法正是可以从现有的可行方案出发, 逐步优化, 达到人们认为满意了就停止, 未必要寻求理论上的最优. 理论上的最优也许离现在的“满意解”不远, 但还要花费极大的计算量. 再说一个企业的利润假如是千万元级的, 要求利润最大的线性规划问题, 方案的目标值差几百元就可以不计较了, 更不要精确到小数点以后的值了.

一句话, 我们寻求的是实际可用的好算法, 而不一定是数学上的好算好, 这也是华罗庚的主张, 他说, 0.618 法是实际可用的好算法, 即使在不是单峰函数的情况下也有效. 如果从数学上考虑, 应该对非单峰函数, 研究它的求峰 (谷) 值的算法. 遇到实际问题, 首先要先判别它是不是单峰的, 然后再决定用什么算法.

(2) 关于更动目标约束法的实例:

在纯粹数学研究中, 数学上严格的等价关系到处可见. 在应用数学基础研究中, 我们也常把一种数学模型按某种规则更动其目标和约束, 转变为等价的另一种数学模型. 比如:

① 线生规划把原规划转变为其对偶规划

$$\max c^T x \qquad\qquad \min b^T y$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} Ax \leqslant b \\ x \geqslant 0 \end{cases} \qquad\qquad \text{s.t.}\begin{cases} y^T A \geqslant c \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

原规划 —— 等价 —— 对偶规划

② 一些非线性规划也可以把原规划转变为其对偶规划

③ 分式规划通过变量代换使其转变为线性规划:

$$\max\frac{U^Ty_0}{V^Tx_0} \qquad \text{通过变换 (Charnes – Cooper)} \qquad \max Z^Ty_0$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\dfrac{U^Ty_i}{V^Tx_i}\leqslant 1, i=1,2,\cdots,n\\ U\geqslant 0\\ V\geqslant 0\end{cases}\qquad t=\frac{1}{V^Tx_0},\ W=tV,\ Z=tU \qquad \text{s.t.}\begin{cases}W^Tx_i-Z^Ty_i\geqslant 0\\ W^Tx_0=1\\ W\geqslant 0\\ Z\geqslant 0\end{cases}$$

分式规划 ———————— 等价 ———————— 线性规划

④ 整数规划中 Gomory 割平面法, 就是利用不断更动约束 (割平面) 的办法, 寻求其整数解.

……

⑤ 变压器优化设计问题

这是我们在 1975—1977 年间完成的研究成果, 曾获全国科学大会奖, 中国科学院重大科技成果奖. 我国电力变压器设计在此成果完成之前, 一直处于手工设计阶段. 此成果的完成标志着我国电力变压器设计进入了一个新阶段. 对这个问题我们所建立的数学模型是混合型整数规划问题, 求解难度大. 后来, 我们采用更动目标法, 把原目标函数更动成两个函数的绝对值之和, 形成一个等价问题. 表面上看, 问题的数学模型更复杂了 (因为出现了函数绝对值的极值问题). 实质上, 我们抓住了目标函数的特殊性质, 给出了一种特别有效的算法. 因为数学模型的描述需要很长的篇幅, 我们简述如下:

原问题为

$$\min_{X\in S}F(x),$$

其中 S 为约束集合, 其元素必须满足许许多多函数方程. 它等价的更动目标后的问题为

$$\min_{X\in S}\{|P(x)-p_0|+|U(x)-u_0|\}.$$

以二维为例. 由于 $P(x),U(x)$ 具有特性: 在 x_1,x_2 取值范围内,

ⓐ $P(x)$ 是 x_1,x_2 的降函数;

ⓑ $U(x)$ 是 x_1 的增函数, x_2 的降函数.

假定 $a\leqslant x_1\leqslant b, c\leqslant x_2\leqslant d$, 我们取此矩形中心 $\bar{x}=(\overline{x_1},\overline{x_2})$, 其中 $\overline{x_1}=\dfrac{a+b}{2},\overline{x_2}=\dfrac{c+d}{2}$, 我们计算 $P(\overline{X}),U(\overline{X})$. 令 $P(\overline{X})=\bar{p},U(\overline{X})=\bar{u}$. 不论以下 4 种情形中哪一种出现:

Ⅰ. $\bar{p}\leqslant p_0,\bar{u}\leqslant u_0$, Ⅱ. $\bar{p}\leqslant p_0,\bar{u}\geqslant u_0$,

III. $\bar{p} \geqslant p_0, \bar{u} \leqslant u_0$,　　VI. $\bar{p} \geqslant p_0, \bar{u} \geqslant u_0$,

总可以去掉原来矩形区域的一半, 只需在剩下的一半区域中去寻找好的解.

这实际上是利用目标函数特性给出了整数规划分枝定界法的一种特殊技巧. 如图 1 所示. 这是一种特殊的平面区域对分法. 华罗庚教授对这种灵活的处理技巧给予了很高的评价.

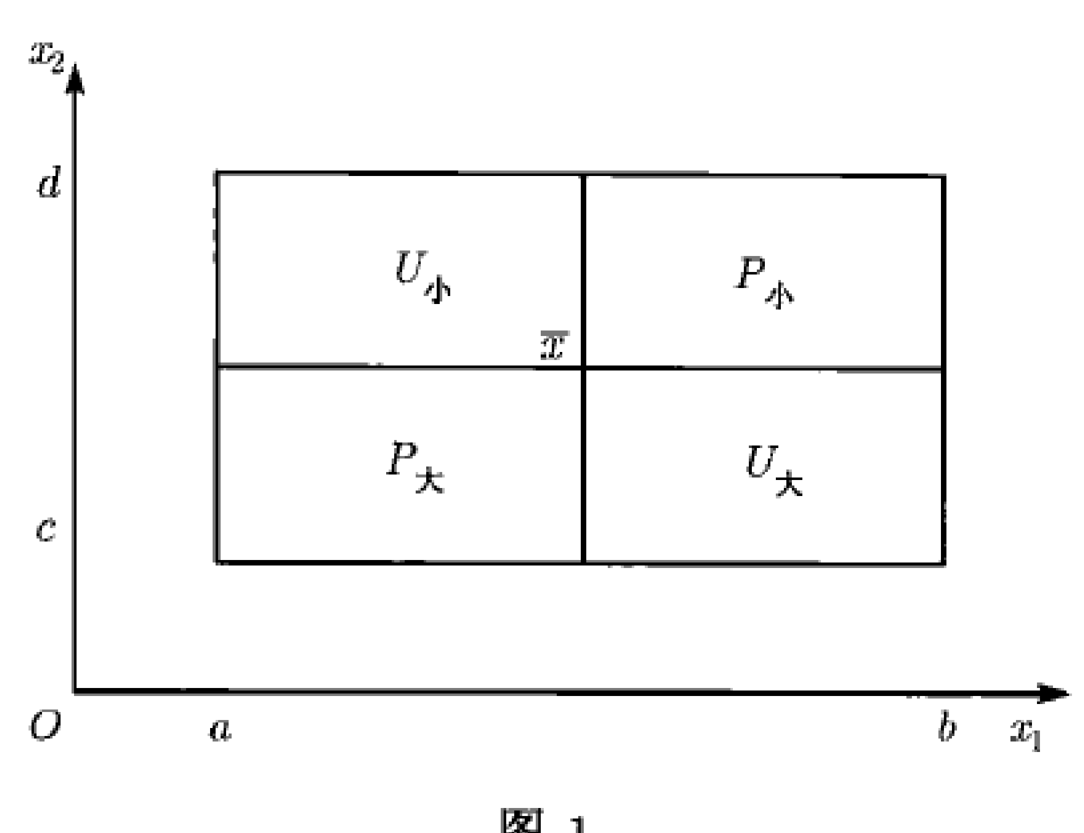


图 1

⑥ 军队营房翻建经费合理分配问题

我军后勤营房翻建任务很重, 合理分配这种经费对我军建设具有重大意义. 通过系统分析与综合, 我们建立了一个具有 6000 多个整数变量、2000 多个约束条件的整数规划模型. 为了寻找好的算法, 我们采用了更动目标函数法, 引进了新的概念, 把目标函数更动为一个矩阵函数的极大极小问题.

为方便起见, 我们简记原问题为

$$\max_{X \in S} F(x).$$

更动目标后的问题为

$$\min_{X \in S} \max_{i,j} \left\{ \begin{array}{cccc} A_{11}(x) & A_{12}(x) & \cdots & A_{1n}(x) \\ A_{21}(x) & A_{22}(x) & \cdots & A_{2n}(x) \\ A_{m1}(x) & A_{m2}(x) & \cdots & A_{mn}(x) \end{array} \right\},$$

其中 S 为约束集合, 其元素必须满足 2000 多个函数等式或不等式.

这又是一个从表面上看, 把问题复杂化了的处理, 实则不然, 根据问题的特殊性, 我们给出了一个很好的求解算法. 此项成果曾获国家科技进步二等奖.

⑦ 线性规划更动约束的一种算法

这是一种简便的近似算法. 为了简洁, 我们用框图表述之. 算法的逻辑框图见图 2.

许多实际问题的目标函数的上下界是可以估算的. 比方某个工厂建立的 LP 模型, 它的目标函数是利润函数, 而利润的上下界大约为 $a = 1500$ 万元, $\beta = 2000$ 万元, 它们是可以估算出来的, 那么, 利用目标函数不等式

$$c^T x \geqslant \frac{a+\beta}{2}$$

增加一个约束, 我们只要判定增加此约束条件后有无可行解即可. 当然判定一个线性不等式组有无解, 不是易事. 但这可以利用单纯形算法两段法的第一段算法. 还可以利用我们提出的新椭球算法 (见以下⑨). 对一个实际问题来说, 比方以上提到的工厂追求利润的问题, 它无需求得数学上的精确解. 利用以上更动约束法, 经过目标函数取值区间的几次对分, 也就满足要求了. 这种算法既简单又易于控制, 所以解决如此类型的问题是很有效的.

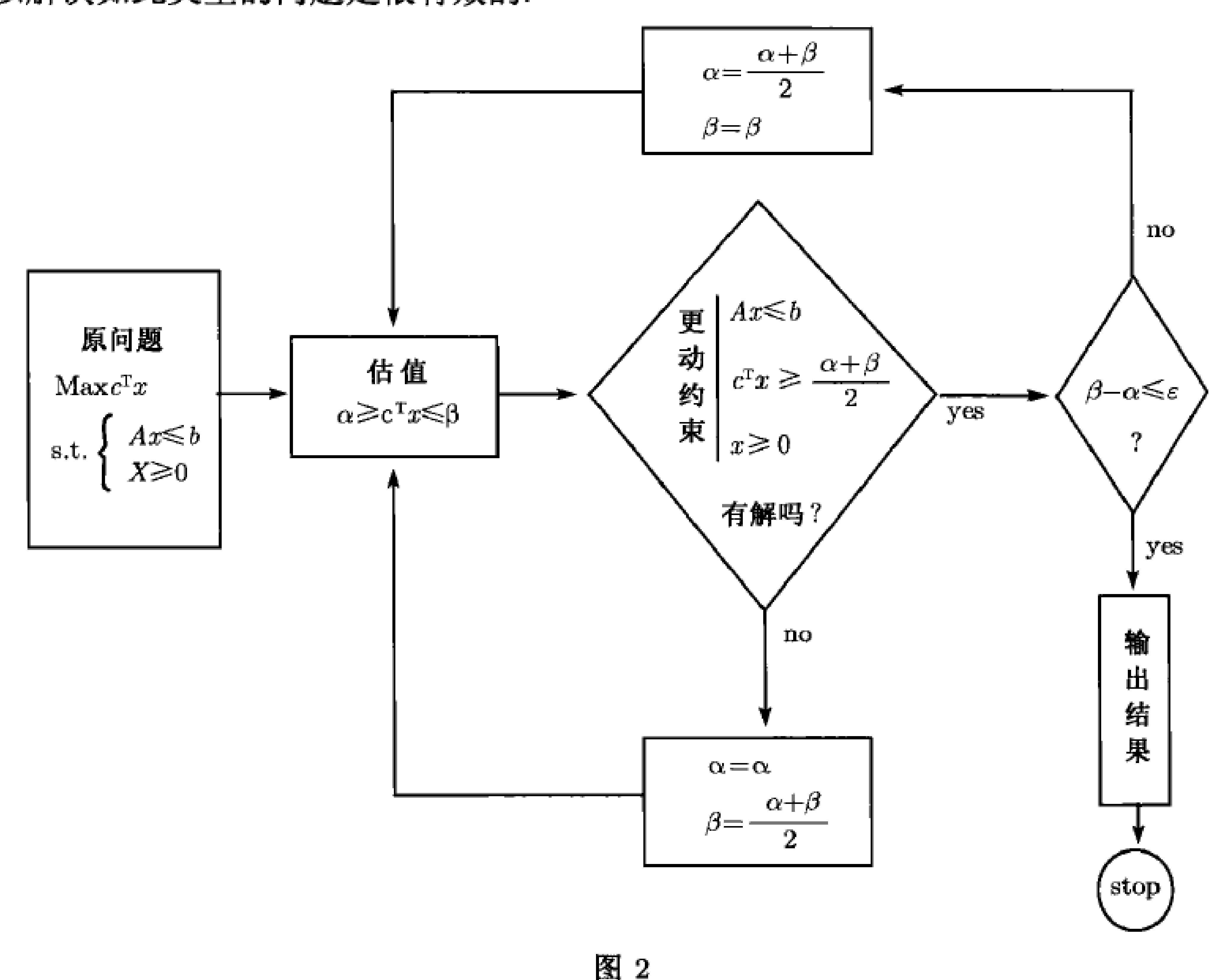


图 2

⑧ 多目标线性规划的一种算法

多目标问题, 实际上是寻求一个各目标 (各方) 都能接受的, 某种意义下的采协解, 一般说来, 每个目标都达到最优的解, 是不存在的. 我们用框图 (图 3) 来说明一种多目标规划的更动约束法如下:

这里, 估值 α_i, β_i 是事先给定的; ε_i 为妥协精度, 也是事先协调好的.

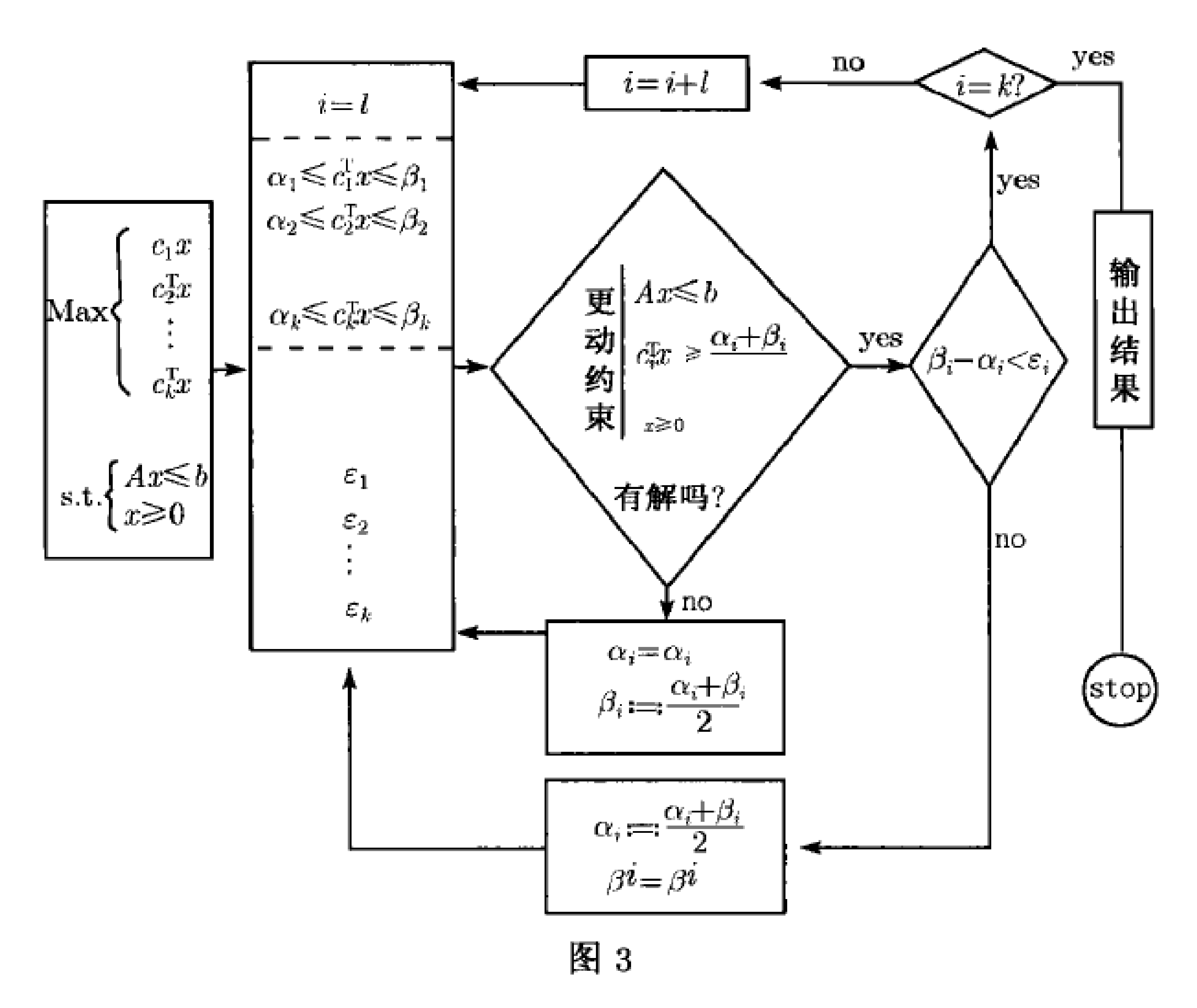


图 3

⑨ 新椭球算法

这是一种基于更动约束的思想与方法, 提出的求解线性规划的新椭球算法. 它与 L. G. Khchian 的原椭球算法不同, 在新算法的椭球迭代过程中, 不仅用约束不等式割掉不合约束集的半个椭球 (椭球中心不在约束集内时), 称之为约束割; 而且在椭球中心落在约束集内时, 它用目标不等式割掉含约束的半个椭球, 称之为目标割. 新算法的不等式系统是原规划 (或对偶规划) 的约束不等式与目标不等式组成的 (规模小), 而不是原椭球算法中的 K-K-T 条件组成的不等式系统 (规模大). 这种新椭球算法, 既有多项式计算复杂性的特性, 又在迭代过程中得到一系列单调趋向最优解的可行解 (在可行解存在时). 如果认为已得满意解, 可随时停机. 因此新算法更为实际、有效. 对于实际问题, 大多数是变量有界的, 初始椭球不大, 新算法更为有效.

这种新椭球算法, 还给出了一种在数学上求线性规划第一个可行解的办法. 到目前为止, 线性规划求第一个可行解的办法只有两个: 一个利用单纯形法迭代的大 M 法, 另一个是利用单纯形法迭代的两段法.

如上所述, 新椭球算法有两种切割椭球 E_k 的办法: 一是约束割, 另一是目标割. 而且对于每步迭代皆取这两种切割之一. 切割后, 我们必须构造 $E_{k+1}\supset\frac{1}{2}E_k$, 使得 $\mathrm{Vol}(E_{k+1})<e^{\frac{1}{2}(n+1)}\mathrm{Vol}(E_k)$.

① 如果 E_k 取约束割, 构造 E_{k+1} 的作法与原椭球算法相同, 此时 $x^k\notin\{Ax<$

$b\}$, 其中 k 是上标, 则存在下标 i, 使得 $\alpha_i^T x^k \geqslant b$.

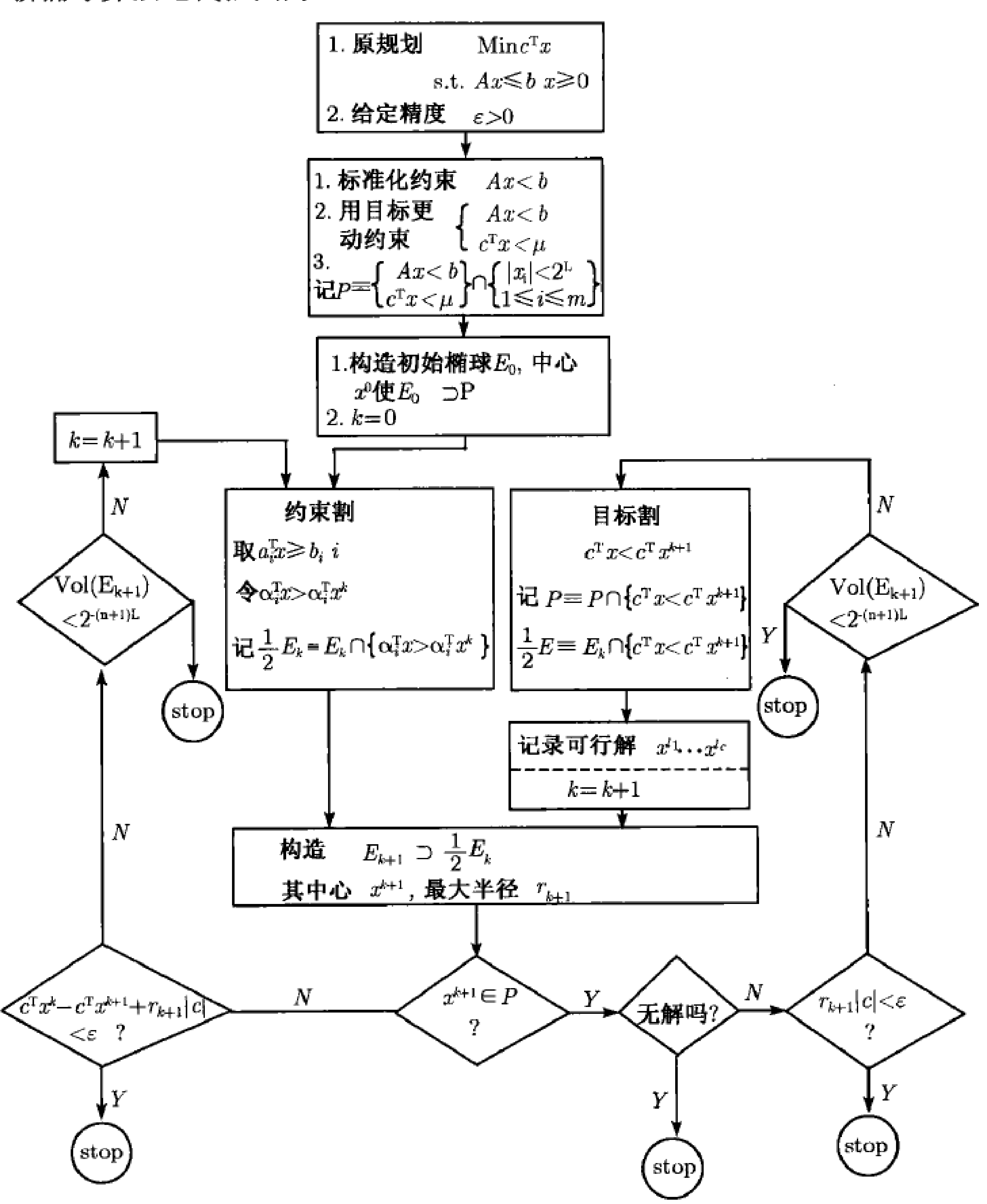
$$\frac{1}{2}E_k = E_k \bigcap \{a_i^T x < a_i^T x^k\}.$$

$$x^{k+1} = x^k - \frac{n}{n+1}(B_k\alpha_i/(\alpha_i^T B_{k\alpha_i})^{\frac{1}{2}}).$$

$$B_{k+1} = \frac{n^2}{n^2-1}\left\{B_k - \frac{n}{n-1}[B_k\alpha_i(B_k\alpha_i)^T/(\alpha_i^T B_k a_i)]\right\}.$$

$$E_{k+1} = \{(x-x^{k+1})^Y B_{k+1}^{-1}(x-x^{k+1}) \leqslant 1\}.$$

新椭球算法迭代框图为:



这里 $E_{k+1} \supset E_k \bigcap \{\alpha_i^T x \geqslant b_i\}.B_k^{-1}$ 是对称正定的, B_{k+1}^{-1} 也是对称正定的. $\mathrm{Vol}(E_{k+1}) < e^{-\frac{1}{2}(n+1)}\mathrm{VOl}(E_k)$.

ⓘⓘ 如果 E_k 取目标割, 此时 $x^k \notin \{Ax < b\}, \frac{1}{2}E_k = E_k \bigcap \{c^T x < c^T x^k\}$. 我们有:

$$x^{k+1} = x^k - \frac{1}{n+1}(B_k c/(c^T B_k c)^{\frac{1}{2}}).$$

$$B_{k+1} = \frac{n^2}{n^2-1}\left\{B_k - \frac{n}{n+1}[B_k c(B_k c)^T/(c^T B_k c)]\right\}.$$

$$E_{k+1} = \{(x - x^{k+1})B_{k+1}^{-1}(x - x^{k+1} \leqslant 1)\}.$$

这里 $E_{k+1} \supset E_k \bigcap \{c^T x < c^T x^k\}.B_k^{-1}$ 是对称正定的, B_{k+1}^{-1} 也是对称正定的. 同样 $\mathrm{Vol}(E_{k+1}) < e^{-\frac{1}{2}(n+1)}\mathrm{Vol}(E_k)$.

ⓘⓘⓘ 初始化, 当 $k=0$ 时, 取 $E_0 = s(0, 2^{2L}), B_0 = 2^{2L}I, x^0 = 0$.

6. 二 (多次) 次建模思想

更动目标约束法就是二次建模的做法. 我们这里说的二次建模有更普遍的意义. 在不更动目标和约束的情况下使所建的模型通过二次建模变得更容易求解, 也具有很高的智力技巧. 这里仅举几个例子说明这个问题.

(1) 变压器铁芯最大截面问题;

(2) 露天煤矿优化设计问题.

这两个问题的第一次建模都是整数规划模型或混合整数规划模型. 如果套用任何一种现成的整数规划求解算法, 都难以实现求解的目的. 因此, 我们进行了二次建模. 在第一次建模的基础上, 我们又建立了它们图与网络模型. 把这两个问题的原来的数学模型化成一个最短路的问题, 利用动态规划最优化原理, 我们给出了它们求解的很好的算法.

这两个问题的一、二次建模及其求解算法, 详见有关文献 (以上所有案例, 详见《中国科学》1995 年第 25 卷第二期第 146 页的文献).

人们会问, 为什么不能一下就建第二次的数学模型呢? 看了这两个例子就会知道, 没有第一次模型, 不可能构思第二次模型, 第二次模型不是直接从实际问题能提取出来的. 它是在第一次模型基础上的更高地抽象和提炼.

7. 关于“36 个字”

1982 年底, 华罗庚在病中写了“数学方法与国民经济”一书的征求意见稿，副标题为“统筹优选运营学”. 该书分三部分, 用“前言”、“中论”、“后语”分开. 在该书中, 华罗庚叙述了他过去提出的 36 个字:

大统筹, 广优选, 联运输, 精统计, 抓质量, 理数据, 建系统, 策发展, 利工具, 巧计算, 重实践, 明真理.

他谈了 36 个字的形成过程, 以及其中的主从关系, 以便搞普及数学的工作者和后来从事应用数学的人能全面的理解掌握它. 下面引述他的一段话:

"在本世纪中叶", …… 想把国民经济搞上去的愿望, 明知学识和经验不足, 宁可放着驾轻就熟的理论专长于第二位、硬着头皮进行尝试, 初步归纳出 12 个字:

大统筹, 广优选, 联运输, 策发展

后来学习了国内外不少文献, 觉得五光十色名目繁多, 经过一定的大刀阔斧地去粗取精、去伪存真的分析研究, 其林林总总, 似易实同的东西可以概括为发展 36 个字 (见以上提到的). 经过分析再分析, 有主有从觉得休道 36 个字, 归根结底, 重点还在于"统筹"和"优选"两法, 也就是为"全国一盘棋"与"进益求精"两用的两法 (常用"精益求精", 我改了一个字, 请排印的同志不要"纠正")."

"联运输不是在运输问题上求最优解吗? 已有一套常用的方法, "线性规划"能解决这样的问题. 统筹方法已注意"时"与"空", 策发展是用统筹原则来安排较长时间的计划问题."

"统筹与优选之间也是密切配合的."

8. 小结

综上所述, 华罗庚应用数学思想与方法论的要点:

(1) 分类观点

不去无谓地谈论应用数学为何物? 应用数学面很广、又是多层次的, 必须分类认识之. 不同类有不同的特殊本质, 处理它必须有特殊的方法; 不同类中又可以根据问题的所涉及的面和不同层次, 分成细类或特殊专题加以研究.

评价应用数学工作, 不同类必须有不同的评价标准. 这才有利于应用数学的发展.

(2) 创新意识

不要以为纯粹数学才强调创新. 创新是第一位的, 对于从事应用数学工作的人, 不论在搞普及型的还是创造型的工作, 都必须有创造性. 任何人要做到: 工作在我, 评价在人; 贵有内秀, 不争虚名.

(3) 探索精神

要永无止境地探索应用数学的发展道路, 探索解决问题的方法, 探索应用数学人才培养. 不在言, 而在行; 说万句, 不如做一件.

(4) 基石与尖刀

华罗庚从事纯粹数学研究, 在方法论上的特长, 正是他从事应用数学研究在方法论上的基石与尖刀. 这是决定他从纯粹数学研究转向应用数学研究的关键因素之一.

(5) 模型论

一切问题都可能是数学问题, 都有它的数学结构, 都可以建立数学模型; 但是, 同一个问题从不同角度描述它, 可以有不同的数学模型. 要解决实际问题, 就要寻找其特殊模型.

(6) 算法论

在面向实际问题, 以解决实际问题为最终目标的应用数学研究中, 对所建的数学模型必须有求解的算法与之匹配, 否则所建的数学模型是没有任何用处的. 从这个角度看, 算法研究成了关键性的. 但这不是华罗庚的算法论观点. 在华罗庚脑中常常有许多三角形关系, 比如



他在考虑这些三角形关系时, 常常不是线与点的联系, 而是整体思维. 因此, 在考虑后一个三角关系时, 他的算法论特点是: 模型算法一体化思路, 当然其基础是实际问题, 这里的基础是考虑问题所依赖的与背景. 如果不能达到这种境界, 那么, 就要强调"灵活"地处理, 采用更动目标、约束思想、二次建模等手段, 这就是他的算法论所提倡的. 只有这样, 才能真正解决实际问题, 才能有创新.

(7) 辩证思维

在解决实际问题的过程中, 模型与算法的形成, 不论是一体化的还是经过更动的, 关键在于对实际问题的调查研究和系统分析. 在调查研究和系统分析中, 必须有很强的辩证思维能力. 这里不重复前面已提到的华罗庚辩证思维的方法, 那是他一生做学问磨炼出来的. 在他从事应用数学研究之后, 他的辩证思维特点主要集中在三个方面: 整体的思维方式, 交叉综合的思维方式, 以及逻辑思维与非逻辑思维 (特别是形象思维) 相结合的思维方式. 形象思维在普及数学方法过程中起了重要的作用; 在创造型的应用数学研究中起了更大的作用. 对于客观世界中的实际问题, 当它展现在你面前时, 你对它感觉是不全面的, 起初远不能抓住它的本质, 人们总是从猜想开始, 然后进行逐步地科学论证. 这种猜想与纯粹数学猜想相比, 更源于形象思维. 有了形象思维, 逻辑思维才能展开论证工作. 所以, 逻辑思维与非逻辑思维两种思维方式的结合, 对面向实际问题的应用数学研究是非常重要的. 人们可以举出许多通过形象思维方式建模的例子, 尤其是通过形象思维建立模型算法一体化的框架的实例.

(8) 交叉、综合与开拓

许多实际问题的解决要靠多学科的交叉综合之合力; 这种学科之间的综合与交叉, 不但利于解决实际问题, 也有利于个人知识的开拓, 开阔视野, 开展创新工作.

这就要求人们善于学习、会团结人.

(9) 群体论

应用数学研究强调群体力量、团队精神, 这与纯粹数学研究不同. 这种学科内部的群体合力, 是解决实际问题的真正保证. 华罗庚在普及数学方法时, 依靠小分队的力量; 在攻关解决重大实际问题时, 依靠联合研究组集体的努力. 他对群体的每个人要求: 勤奋、实干.

(10) 基础论

华罗庚认为应用数学工作, 不论是普及型还是创造型, 要想获得成功, 非常重要的条件是要有雄厚的数学基础. 当然应用数学的基础在深度和知识面的广度上, 与纯粹数学的基础要求, 不完全一样. 但是他们在数学的思想和技巧的修养上的要求是完全一样的.

(11) 后劲论

华罗庚的后劲论原先是对纯粹数学研究而言的, 他认为从事纯粹数学研究的人, 基础理论越雄厚后劲越大. 后来, 他在从事应用数学探索过程中, 认识到应用数学更有后劲问题, 而且对于面向实际问题的应用数学研究, 除了基础理论厚薄影响后劲外, 经验知识的积累多少也影响后劲; 一般说来, 随着工作时间的增加, 这些非书本知识积累越丰富, 这有点像中医大夫, 越老越 "神", 越老对实际问题的洞察能力越强. 他私下说, 这种后劲论不可宣扬, 他说中国应用数学队伍, 不论从数量上还是学术水平上, 都差得远. 假若一宣扬这种后劲论, 怕就有人倚老卖老, 以为能自然熬成仙, 实为懒汉儒夫, 一害本人, 二害应用数学队伍的名声, 要是那样, 中国应用数学就要走弯路了, 人们就更看不起应用数学了.

说到应用数学队伍, 他心里是多么希望原来搞纯粹数学研究的和搞应用数学基础理论研究的人, 有一批力量转向面对实际问题的应用数学研究; 他多么希望这批力量也跟着他一起 "下水" 尝一尝普及味, 再搞提高与创造. 他认为这批力量是有后劲的, 但必须转到面向实际研究的方向. 他也很明白, 这批人走上这一步很难, 从思想上 "跳出来, 是很不容易的!" 在谈论这些问题时, 他甚至很激动, 但最终他还是很理解他们, 只是觉得非常惋惜!

(12) 动力论

人们会问, 华罗庚何以成为伟人? 他一生勤奋、探索、创新、开拓、拼搏、爱国, 他的动力来自何方? 直至他一生的最后几年, 重病在身, 仍然战斗不息. 大年初一, 当一位学生劝他保重身体, 少在外地劳累时, 他急了并直言: "死在家里, 或死在外头, 不是一样吗!? 人家不了解我, 你也不理解我!?" 他仍在国内外奔波, 最后战死在疆场 (倒在东京大学的讲坛上, 离开了人世, 这在科学史上也是罕见的). 他何以能这样顽强的拼搏? 他的动力来自: 为了祖国、为了中华民族. 为了抗日战争, 他放弃在英国剑桥的优越科研条件赶回祖国、在条件艰苦几乎与世隔绝的昆明苦战,

就是一个明证; 为了建设新中国, 1950 年他又放弃在美国的优厚待遇赶回祖国, 又是一个明证; 他这次回国时发布的公开信, 铿锵有力地号召在国外的学者, 为了祖国, 为了民族, 应该回去, 回到祖国, 共同建设自己的家园. 他回国后呕心沥血为发展中国的纯粹数学和应用数学事业. 他以毛泽东表扬他"不为个人而为人民服务"为最高奖赏, 又是一个明证. 学术上的为祖国、为民族、为人民服务, 以及平时行动上为祖国、为民族、为人民服务的事情, 比比皆事, 举不胜举.

他教育自己的学生, 干事业必须有动力, 他指的动力就是, 为了祖国、为了中华民族以及敢于接受挑战, 敢想、敢干、敢拼搏的精神. 这就是他的动力论.

附录 (III) 数学现象、数学技术和数学工程①

(1) 数学现象

华老在跟我谈论把实际问题变成数学问题 (建模) 的重要性时, 非常强调灵活性. 同时强调数学的洞察力或数学的直觉判断力. 他提一个重要的观点: 数学现象. 他认为洞察力、直觉判断力、灵活性都是通过观察数学现象才能达到很高的境界. 因此, 他赞成"一切问题都是数学问题"的观点, 这是因为一切实际问题都蕴含着数学现象. 我第一次听华老阐述他的观点时感到十分新奇, 他说:"自然界存在着种种现象, 物理现象、化学现象、生理现象 ……, 也存在数学现象. 物理学是研究物理现象的, 化学是研究化学现象的, 生物学是研究生物现象的 ……, 数学是研究数学现象的."这是对数学本源的一种认知. 后来, 我看到东方血统的几位著名数学家、菲尔兹奖得主小平邦彦、丘成桐、陶哲轩也有同样的看法, 小平邦彦晚年发表过几篇文章或报告谈自己一生的感悟, 他说他一生埋头做数学研究, 发现了几个定理, 获过大奖, 但回过头来问自己, 数学是什么? 自己也说不清楚. 晚年他悟到人有"数觉", 不同的人数觉不一样, 这跟人有"音觉"一样. 他看到了"自然界的背后确确实实存在着一个数学现象的世界", "数学是研究数学现象的学问". 他与华老的感悟是一致的. 丘成桐认为"数学研究的基本对象是自然的一部分", "自然数、球面、Riemann 面是自然的一部分", "数学的一般理论需要大量的现象学研究". 陶哲轩也谈到了数学现象.

以往人们不提数学现象, 那是因为人们没有看到数学现象, 在回答什么是数学这个问题时, 人们都说不清楚, 似乎数学天生是抽象的靠逻辑演绎的东西, 不论是直觉主义流派、逻辑主义流派, 还是形式主义流派, 都是就数学的一个侧面性质来谈数学. 数学现象的观点对应用数学的发展是重要的, 对纯粹数学的发展也是重要的. 世界上的一些数学天才, 洞察数学中很深奥的东西, 应该说他们看到了数学的"崇山密林"、"高山险峰"中人们看不到的数学现象, 有的说是神的点拨, 如拉马努金, 那是深层次的数学现象在他头脑中的反映, 拨开一层层迷踪突然看到的奇观, 他把这一切归功于他家乡的女神.

(2) 数学技术

1980 年 8 月在美国旧金山召开的第四届国际数学教育会议上, 华老应邀作了

① 摘自杨德庄纪念华老 100 周年华诞文章"恩重如山 —— 数学大师指导我们做应用数学"

题为“在中华人民共和国普及数学方法的若干个人体会”的报告, 谈到了普及数学方法的三个原则:

①“为谁”? 或“目的是什么”?

②“什么技术”?

③“如何推广”?

华老在北京医院与我长谈时, 我问华老以上三原则中的第二条原则为什么不是“什么方法”, 而是“什么技术”, 报告的题目是普及数学方法的体会, 华老听后, 先是笑, 后又乐了. 他说:“你是第一个提这个问题的人, 说明你看得很认真、很仔细, 这是我的伏笔”. 听到“伏笔”二字, 我立刻联想到华老给我们上课的讲义常常用伏笔, “草绳伏线, 意在千里”, 但不知这里伏笔的含义. 华老见我不解, 解释说:“应用数学是一种技术, 现在人们没有认识到, 将来会认识到的, 等将来国际上一旦有人提出数学技术的观点时, 你就说我华某人早就看到了. ”果不其然, 我后来看到了国外有人对数学的新认识, 出现了数学技术的提法. 如“当今被如此称颂的高技术, 本质上是一种数学技术”(E. E. David), “数学是关键技术之关键技术”(H. Neunzert) 等等, Atiyah 也把纯粹数学中的一些技巧称为数学技术. 自从有了华老“数学现象”和“数学技术”的点拨, 我在做应用数学实际项目时, 观察分析问题的境界就不同了.

(3) 数学工程

在数学现象、数学技术观点提出的同时, 华老还提出了另一个重要观点: 数学工程. 这里有一段佳话, 钱老 (钱学森)、许国志在文章 (报告) 中称赞华老是“国内搞系统科学的先行者”. 华老在文章 (报告) 中称赞“钱老、许国志是国内最先倡导发展运筹学的”. 大师之间互相肯定、互相尊重、互相切磋, 为中国科学技术做出贡献的同时, 互相鼓励, 为中国科技界做出了榜样. 华老不仅称赞钱老、许国志, 而且还善于学习别人的长处, 这也是华老的科学生涯中最为突出的品格之一. 1936 年访英时, 学习剑桥学派如何搞纯粹数学; 1946 年访苏时, 学习前苏联除了纯粹数学, 还有如何发展应用数学以及培养人才的数学竞赛经验; 后来在美国, 学习更加全面, 特别是向冯 · 诺依曼学习, 如何发展计算机及相关学科. 他认为钱老的系统论、系统科学和系统工程是可以与数学科学、数学技术相结合的. 他提出应用数学面对的就是宇宙中 (特别是地球上) 客观存在的或人类建造的各种系统. 人类活动涉及经济、国防和社会发展的各个领域中的系统. 大的如现代航天工程, 二战期间研制原子弹的曼哈顿工程, 小到一个工业生产的产品、一个装备 ……. 这些工程、产品、装备 …… 内部结构非常复杂, 人类制造它们是为了实现某个或多个目标. 这样的复杂系统具有多种现象, 其中有数学现象; 实现这样的系统要用到许多技术, 其中有数学技术. 透过系统的数学现象, 运用数学技术, 建立其数学模型与算法, 并研制在计算机上可实现的软件, 这个过程自身构成一个复杂的工程, 称之为数学工程.

用数学工程来研究复杂系统, 目前最引人注目的是数学仿真技术, 因为它必须通过计算机系统来实现, 人们也称其为计算机仿真, 它涉及的关键技术是数学技术. 正如俄罗斯数学家 A. ASamarskii 说的, 这是一种"数值实验"技术. 对一个系统, 首先要进行调查研究和系统分析, 构建它的数学模型, 同时要研究一种好的算法, 求解这种特殊的数学模型, 然后要选择适当的计算机系统和好的软件工程, 在计算机上实现数学模型和算法, 他声称这是一种新的科学方法 (石钟慈和国外的一些科学家称其为第三种科学方法), 并表述为:

$$\text{Model模型} + \text{Algorithm(算法)} + \text{Programme(程序)}$$

简称为 MAP 是一个真实世界到虚拟数学世界的一个映射. 它实质上是华老所说的数学工程.

(4) 发展应用数学, 必须克服七个"先天不足"

一个数学家看到了 (悟到了) 数学现象, 并且明确提出"数学是研究数学现象的学问", 他就看清楚了数学的本源. 华老和小平邦彦各自独立地悟到了数学现象. 更进一步, 华老看到了数学技术、数学工程, 这与他长期从事应用数学实践、他的整体数学观有关. 他清楚地认识到, 在人类社会发展的进程中, 数学的力量、威力和潜力. 因此他始终倡导数学要为国家的建设、人民地福祉服务. 这一点并非一般人, 甚至包括科学和领导者所能认识到的, 即使在数学处在世界领先地位的美国, 上世纪八十年代, 美国国家研究委员会主席普雷斯 (Frank Press) 说, 数学的重要作用"这一点却没有被人们充分认识到", "国家并没有充分挖掘数学科学的潜力"……"为此, 本委员会召集有关方面的著名科学家, 组成数学科学资金来源特别委员会". 该委员会主席 E. E. David, 1984 年, 该委员会发表了报告"Renewing U.S. mathematics: Critical Resource for Future"这份报告对美国的数学繁荣发展, 保持领先地位起了重大的作用 (这份报告中文版名称为"美国数学的现在与未来"). 华老不仅主张大力发展应用数学技术, 而且身体力行、亲自实践. 他在艰难的探索实践中, 充分认识到在中国发展应用数学比在美国发展更为困难, 并总结了在中国发展应用数学的七大先天不足之处: 需求先天不足, 认知先天不足, 人才先天不足, 方法论先天不足, 评价体系先天不足, 交叉综合先天不足, 资金支持先天不足.

① 需求先天不足

华老生活的年代, 先是旧中国, 经济基础薄弱, 后是计划经济体制, 必然导致对应用数学的发展需求不足.

现在中国经济发展了, 也引入了市场经济体制, 需求增加了些, 但也不尽然, 人们的认识还停留在过去水平.

② 认知先天不足

在中国一般人眼中, 数学是抽象的、深奥的, 数学对于促进经济发展、社会进步不大有关系, 数学之有用的认知先天不足. 为了破除人们对数学的神秘感, 认识数学之有用, 提高全民族的数学素质, 华老除了在报刊上发表过数学之有用的文章外, 还亲自普及数学技术, 用大量的实例说明或证明数学之有用的观点. 但华老认为, 这还远远不够, 因为普及推广所涉及的实际项目只存在简单的数学现象, 研究复杂的数学现象需要发展更深刻的数学技术, 而国内有这种认知的人太少了. 当今, 国外的有识之士的认知"数学是关键技术之关键", "高技术本质上是一种数学技术"是针对当今经济、科技发展中急需解决的、复杂的数学现象而言的. 从某种意义上来讲, 强国需强数学技术, 而首先提高认知水平是非常必要的.

③ 人才先天不足

从整体上讲, 我国的数学人才是不多的, 真正搞应用数学的人更是少之又少, 目前, 我国大学教育中, 对数学人才的培养模式, 基本全部沿用培养纯粹数学人才的套路, 应用数学的人才培养模式还有特探讨, 人才先天不足.

④ 评价体系先天不足

在国内, 人们一直采用评价纯粹数学的标准 (以发表论文为主) 去评价应用数学工作. 由于得不到公正、公平的评价, 导致数学人才不愿意去搞应用数学, 因为它既难搞却又被偏见轻视, 这种偏见认为应用数学是低水平的, 无须高智力的劳动. 国际数学界也存在这种偏见, 不过中国更甚. 应用数学的发展必须有自己的评价标准和评价体系.

⑤ 方法论先天不足

纯粹数学已有经历几百年形成的一套方法论模式, 应用数学还没有较为成熟的方法论, 各国的发展都在探索之中. 在中国, 华老在实践中他感悟到方法论的重要性, 他以特有的数学观, 总结出一套应用数学的方法轮, 以弥补其先天不足. 但是, 通常一般人并不了解、也不理解它的重要性. 不少人虽然在搞应用数学, 却依照纯粹数学的套路, 随着文献走, 因为这样最省事、也最容易得到承认.

⑥ 交叉综合先天不足

一般来说, 纯粹数学研究主要依靠个体力量进行, 而应用数学研究必须依靠团队的力量. 这个团队不只是数学的, 而是多学科交叉综合的. 这一点在中国应用数学的认知上、实践上都存在着先天不足.

⑦ 资金支持先天不足

资金支持对于应用数学的发展而言至关重要. 在这个问题上, 华老说的不多, 他仅指出这个问题的重要性. 但他又非常了解我国的国情, 解决此事在他那个年代几乎是不可能的. 以华老的品格与风格, 永远以为人民服务为先.

目前, 我国对数学研究的支持, 主要侧重于纯粹数学和应用数学的基础理论研究. 但在我国的经济建设与社会发展中, 在各个领域都有大量急需解决的实际问题,

需要有许许多多应用数学技术人才攻关研究, 这就需要大量的资金支持, 可是, 我国在这方面的资金支持非常不足. 正如美国国家研究委员会主席 F. Press 说的:“要让政府、公众及科学界自身认识到, 要是不重视这个至关重要的支持问题, 我们将会面临怎样的危险.”

(O-3873.0101)

华罗庚文集 | 应用数学卷 II |


ISBN 978-7-03-027250-8
9 787030 272508 >

销售分类建议：高等数学

定 价：98.00元